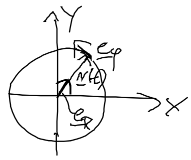
Kreisbewegung:



$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi = \varphi(t), \quad R = \text{const}$$

$$\underline{r}(t) = R\,\underline{e}_R \,, \quad \underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \frac{d}{dt}\underline{r}(t)$$

$$= R\dot{\varphi}\,\hat{\underline{e}}_\varphi = \underline{\omega} \times \underline{r}(t)$$

Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega} = \omega\,\underline{e}_z$ mit $\omega = \dot{\varphi}$

Beschleunigung: $\underline{a}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = \dot{\underline{v}}(t)$

$$= \underbrace{R\dot{\omega}\,\hat{\underline{e}}_\varphi}_{\text{Tangentialbeschl.}} - \underbrace{R\omega^2\,\hat{\underline{e}}_R}_{\text{Zentripetalbeschl.}}$$

I.2 Newton'sche Axiome

① $\boxed{\text{Jeder Körper verharrt in Ruhe oder bewegt sich gleichförmig, wenn er keinen äußeren Kräften unterworfen ist}}$

auch "Lex prima" oder "Galilei'sches Trägheitsgesetz"

Erläuterungen:

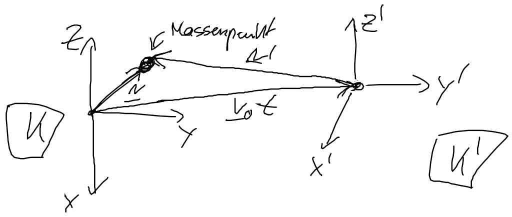
- „in Ruhe": Bahnkurve $\underline{r}(t) = \underline{r}(t=0) = \text{const}$ d.h. $\underline{v}(t) = \underline{a}(t) = 0$
- „gleichförmige Bewegung": $\underline{r}(t) = \underbrace{\underline{r}(t=0)}_{\text{Ort zur Zeit } t=0\ (\underline{r}(0))} + \underbrace{\underline{v}\,t}$ mit $\underline{v} = \text{const}$ (Geschw.)

In beiden Fällen gilt: $\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{a}(t) = 0$

Keine Beschleunigung!!

Koordinatensysteme (Bezugssysteme), in denen ein kräftefreier Körper tatsächlich in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung ist, heissen Inertialsysteme außerdem:

Sei K ein Inertialsystem. Jedes relativ zu K mit konstanter Geschwindigkeit $\underline{v}_0$ bewegte Koordinatensystem K' ist wieder ein Inertialsystem



$$\boxed{\underline{r}'(t) = \underline{r}(t) - \underline{v}_0 t} \quad (*)$$

Ort bzgl. K' — Ort bzgl. K

Die Transformation (*) heißt „Galilei-Transformation"

implizit angenommen: $t' = t$, d.h. Zeit ist „absolut" (im nicht-relativistischen)

In ~~jeden~~ beiden Inertialsystemen gilt: $\ddot{\underline{r}}(t) = \ddot{\underline{r}}'(t) = 0$

Beschleunigungen verschwinden!

Zusammenfassend:

Inertialsysteme dienen (u.a.) dazu, mechanische Grundgleichungen besonders einfach zu formulieren

„Nicht-Inertialsystem":

Koordinatensysteme, die relativ zu einem Inertialsystem beschleunigt sind oder rotieren

② Die Beschleunigung eines Körpers ist proportional zur Gesamtkraft $\underline{F}$, die auf den Körper wirkt.
Der Proportionalitätsfaktor ist die ("träge") Masse m

„lex secunda" oder „Bewegungsgesetz"

Bemerkungen:

- Zum Begriff "träge Masse":

aus der tägl. Erfahrung: Holzblock läßt sich leichter bewegen als gleich großer Eisenblock

⇒ die Wirkung einer Kraft $\underline{F}$ hängt vom Material

Je nach Material wird der Kraft ein entsprechender "Trägheitswiderstand" entgegengesetzt

Es gibt auch die sogenannte "Schwere Masse", die im Gravitationsgesetz auftaucht

Experimentell: schwere und träge Masse sind gleich groß (Äquivalenzprinzip)

$\Rightarrow$ man spricht meist nur von "Masse"

- Axiom ② als Formel:

$$\boxed{\underline{F} = \dot{\underline{p}} = m\underline{a}} \qquad \text{mit } \underline{p}(t) = m\,\underline{v}(t) \text{ Impuls}$$

Masse

Hierbei wird implizit angenommen, dass die Masse zeitunabhängig ist!

Ist meist auch richtig, aber es gibt Ausnahmen:

- Rakete (m wird kleiner während der Bewegung)
- Auto mit Verbrennungsmotor
- Relativistische Bewegung: $\frac{v}{c} \lesssim 1$

Betrag d. Geschwindigkeit

Lichtgeschw.

dort gilt: $m = m(t) = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ Ruhemasse

In diesen Fällen nimmt man die allgemeine Formulierung $\underline{F} = \dot{\underline{p}}$

Grenzfall $\frac{v}{c} \to 0$

nicht-relativist. ~~Gre~~ Grenzfall: $m \to m_0$

- Rein mathematisch ist $\underline{F}$ ein "Kraftfeld" mit 3 Komponenten (und $\underline{a}$ ist Beschleunigungsvektor)

$\Rightarrow$ die Gleichg. $\underline{F} = m\underline{a}$ bildet System aus 3 (möglicherweise gekoppelten) Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit (DGL)

$\Rightarrow$ Für solche DGL-Systeme existiert Lösung für vorgegebene Anfangsbedingungen $\underline{r}(0)$, $\underline{v}(0)$

($\underline{r}(t=0)$)

$\Rightarrow$ Newton'sche Mechanik als „deterministische Theorie"

– Beispiele für Kräfte

Allgemein haben Kräfte die Form $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}(t), \underline{v}(t), t)$

explizite Zeitabhängigkeit

Geschwindigkeitsabhängigkeit

i) Gewichtskraft (Schwerkraft)

In der Nähe der ~~Erdobe~~ Erdoberfläche

$$\underline{F} = m_s \underline{g} \quad \text{mit} \quad \underline{g} = (0, 0, \underbrace{-g}_{\text{Richtung senkrecht zur Oberfläche}}) \quad \text{mit} \quad g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$$

Meter

Sekunde

Erdbeschleunigung

mit m_s „schwere Masse"

man findet experimentell: Kein Unterschied zwischen schwerer und träger Masse (konsistent mit Galilei-Experiment: alle Körper fallen gleich schnell)

ii) Reibungskraft

Zähigkeit (Viskosität)

$$\underline{F} = -\gamma(\underline{v})\,\underline{v}$$

ist entgegen der Geschwindigkeit gerichtet ($\gamma > 0$)

oft geht man davon aus, dass $\gamma(\underline{v}) = \gamma = \text{const}$

$\Rightarrow$ „Stoke'sche Reibung"

iii) Lorentzkraft

Geschwindigkeit

$$\underline{F} = q\,(\underline{E}(\underline{r}, t) + \tfrac{1}{c}\,\underline{v} \times \underline{B}(\underline{r}, t))$$

Ladung

elektr. Feld

Magnetisches Feld

iv) Federkraft (Hooke'sches Gesetz)

$$\underline{F} \sim \underline{r}$$

Beachte: Das sind alles Einteilchen Kräfte

Sehr wichtig sind außerdem Zweiteilchen Kräfte (oder Mehrteilchen Kräfte)

$\underline{F}_{ij}$

Kraft von Teilchen j auf Teilchen i (in einem Vielteilchen-System $i,j=1,\dots,N$)

③ $\boxed{\text{Die Wirkung zweier Körper aufeinander ist stets gleich und von entgegengesetzter Richtung}}$

„Lex tertia" oder „actio gegengleich reactio"

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$$

Kraft von Teilchen 2 auf Teilchen 1

Kraft von 1 auf 2

Beispiele

i) Gravitationskraft zwischen 2 Körpern der Masse m_1 und m_2

$$\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} \underbrace{(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)}_{\text{Verbindungsvektor}} \quad \text{mit } \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$$

Meter

Kilogramm

Sekunde

man sieht sofort

$$\underline{F}_{21} = -\gamma \frac{m_2 m_1}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3} (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) = -\underline{F}_{12}$$

ii) Coulombkraft zwischen zwei geladenen Körpern mit Ladungen $q_1 = Z_1 e_0$ und $q_2 = Z_2 e_0$

Elementarladung

$$\underline{F}_{12} = \frac{Z_1 Z_2 e_0^2 (\underline{r}_1 - \underline{r}_2)}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} = -\underline{F}_{21}$$

unabhängig von der Masse, aber abhängig von den Ladungen (anziehend oder abstoßend)

Weitere Beispiele sind Zweiteilchenkräfte in der Welt der Elementarteilchen (starke Wechselwirkung (Kernkräfte), schwache Wechselwirkung (β-Zerfall))

Die Reichweiten sind dabei aber so klein, dass sie für makroskop. Systeme keine Rolle spielen !!

(Gravitationskraft: $\sim \frac{1}{r^2} \hat{=}$ langreichweitig !!)

Superpositionsprinzip

Die auf einen Körper wirkenden Kräfte addieren sich vektoriell!

Betrachte Vielteilchensystem aus Teilchen $i = 1, \dots, N$ (Gesamtzahl der Teilch). Häufiger Ansatz:

$$\underbrace{\underline{F}_i}_{\text{Gesamtkraft auf Teilchen } i} = \underbrace{\sum \underline{F}_i^{\text{extern}}}_{\text{Summe der „externen" Kräfte, z.B. Reibung, Schwerkraft, Anwesenheit einer Wand}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \underbrace{\underline{F}_{ij}}_{\text{Zweiteilchenkräfte (Wechselwirkungen) von } j \text{ auf } i}$$

Beachte: Die Anwesenheit von (Wechselwirkungskräften) Zweiteilchenkräften führt sofort zu einer Kopplung (Verkomplizierung) der Bewegungsgleichungen !!

Beispiel: $N = 2$, eine externe Kraft auf jedes Teilchen

2. Newton'sches Axiom $\Rightarrow$

$$m \ddot{\underline{r}}_1 = m \underline{a}_1 = \underline{F}_1 = \underline{F}_1^{\text{extern}} + \underline{F}_{12}$$

$$m \ddot{\underline{r}}_2 = m \underline{a}_2 = \underline{F}_2 = \underline{F}_2^{\text{extern}} + \underbrace{\underline{F}_{21}}_{= -\underline{F}_{12}}$$

Beispiele: Planetenbewegung, gekoppelte Schwingungen ...

I.3. Konservative Kräfte, Potential

allg.: $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}(t), \underline{v}(t), t)$

Spezialisiere nun auf Kräfte der Form

$$\underline{F}_i = \underline{F}(\underline{r}_i) \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

d.h. – keine Abhängigkeit von Geschwindigkeit
– keine explizite Zeitabhängigkeit

betrachte außerdem Einteilchenkraft (Notation einfacher), geht aber auch für Zweiteilchenkraft!

Konservative Kraft

$\underline{F}_i$ läßt sich darstellen als Gradient eines Potentials

also $\underline{F}_i = -\nabla_i V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$ mit $V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$ „skalares Potential" oder „potentielle Energie"

Gradient bzgl $\underline{r}_i$

Kartesisch: $\nabla_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \end{pmatrix}$

Solche Kräfte nennt man konservativ

Beachte: • Es gibt Fälle, in denen Kräfte der Form $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}_i)$ nicht konservativ sind!

• Es gibt Fälle, in denen $\underline{F}$ auch von der Zeit abhängt und man schreiben kann $\underline{F}(\underline{r}_i, t) = -\nabla_i V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t)$. Man spricht dann aber nicht mehr von konservativ!