3.2 Eigenschaften von $P(x)$

b) Charakteristische Funktion und Kumulanten

• **Def.:**
$$\boxed{G(k) = \int dx\, e^{-ikx} P(x) = \langle e^{-ikx} \rangle} \quad (3.13)$$

• erzeugende Fkt. der Kumulanten:
$$\boxed{\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c} \quad (3.16)$$

(3.17)

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned}
\langle x \rangle_c &= \langle x \rangle \\
\langle x^2 \rangle_c &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \Delta x^2 \\
\langle x^3 \rangle_c &= \langle x^3 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2\langle x \rangle^3 = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle \\
\langle x^4 \rangle_c &= \langle x^4 \rangle - 4\langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 + 12\langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6\langle x \rangle^4 \\
&\neq \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle \\
&\;\vdots
\end{aligned}}$$

... „wesentliche Momente" von $P(x)$

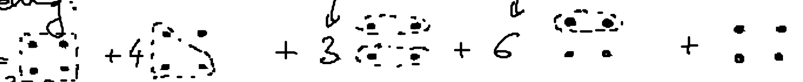
• Umkehrung:

$$\boxed{\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \langle x \rangle_c \\
\langle x^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle_c + \langle x \rangle_c^2 \\
\langle x^3 \rangle &= \langle x^3 \rangle_c + 3\langle x^2 \rangle_c \langle x_c \rangle + \langle x \rangle_c^3 \\
\langle x^4 \rangle &= \langle x^4 \rangle_c + 4\langle x^3 \rangle_c \langle x_c \rangle + 3\langle x^2 \rangle_c^2 + 6\langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c^2 + \langle x \rangle_c^4
\end{aligned}} \quad (3.18)$$

Anzahl der verschiedenen Kombination aus 3 Elementen: $\binom{3}{2} = 3$

$\frac{1}{2}\binom{4}{2}$ $\binom{4}{2}$

• graphische Darstellung:

Bsp. $\langle x^4 \rangle =$ 

$\langle x^4 \rangle_c \quad \langle x_c^3 \rangle \langle x_c \rangle \quad \langle x^2 \rangle_c^2 \quad \langle x_c^2 \rangle \langle x \rangle_c^2 \quad \langle x \rangle_c^4$

Cluster $\hat{=} \langle \ldots \rangle_c$

allgemein:
$$\langle x^m \rangle = \sum_{\{p_n\}}' m! \prod_n \frac{1}{p_n!\,(n!)^{p_n}} \langle x^n \rangle_c^{p_n}$$

p_n .... Anzahl der Cluster mit Ordnung n

$\sum'_{\{p_n\}}$ .... über alle Cluster-Gruppen $\{p_n\}$ mit $\sum_n \overset{\text{Ordnung}}{n}\, \overset{\text{Anzahl}}{p_n} = m$

$\prod_n \frac{m!}{p_n!\,(n!)^{p_n}}$ .... mögliche Realisierungen der Clustergruppe $\{p_n\}$

• Bsp: Gaußsche Verteilung (3.12) $\quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$

(i) $G(k) = \exp\left[-\frac{k^2\sigma^2}{2} - ikx_0\right]$ (3.19)

(ii) $\ln G(k) = -ikx_0 - \frac{k^2\sigma^2}{2} \xrightarrow[(3.16)]{} \boxed{\begin{aligned} \langle x\rangle_c &= x_0 \\ \langle x^2\rangle_c &= \sigma^2 \end{aligned}}$ (3.20)

$\left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n\rangle_c\right)$

$\langle x^3\rangle_c = \langle x^4\rangle_c = \ldots = 0\,!$

bestimmen Gaußsche Verteilung!

3.3 Beispiele

a) Diskrete Verteilungen:

(i) Binomial-Verteilung

• Geg: Einzelexperiment mit 2 Ausgängen

also: $x = A, B$ mit $p(A) = p$

$p(B) = q = 1 - p$

Ges: Wahrscheinlichkeit für N_A Ausgänge A bei N Einzelexperimenten

$$\boxed{P_N(N_A) = \underbrace{\binom{N}{N_A}}_{= \frac{N!}{N_A!\,(N-N_A)!}} p^{N_A}\, q^{N-N_A}} \quad (3.21)$$

$\binom{N}{N_A} = \frac{N!}{N_A!\,(N-N_A)!}$ ... Binomialkoeffizient

• Bsp: (1) Würfel: A ... werfe 6, $p(A) = p = \frac{1}{6}$

B ... " keine 6 $\quad p(B) = q = \frac{5}{6}$

(2) Münze: A … Kopf , B … Zahl

(3) Dart „ohne Geschicklichkeit"

A … treffe ● , $P(A) = \frac{F(A)}{F}$

B … treffe Rest $P(B) = 1 - P(A)$

• charakteristische Funktion:

$$G_N(k) = \langle e^{-ikN_A}\rangle = \sum_{N_A} e^{-ikN_A}\, p_N(N_A) \overset{(3.21)}{=} \sum_{N_A} \binom{N}{N_A} \left(pe^{-ik}\right)^{N_A} q^{N-N_A}$$

$$= \left(pe^{-ik}+q\right)^N$$

$$\langle N_A\rangle = \langle N_A\rangle_c \overset{(3.14)}{=} Np$$

$$\langle N_A^2\rangle_c = (\Delta N_A)^2 \overset{(3.16)}{=} Npq$$

1. $\ln G_N(k) = N \underbrace{\ln\left(pe^{-ik}+q\right)}_{\ln G_1(k):\ \text{für einen Versuch}}$ } Kumulanten für N Versuche = Kumulanten für 1 Versuch × N

2. Kumulanten:

ein Versuch: Momente $\langle N_A^n\rangle = 1^n p + 0^n q = p$

N Versuche: $\langle N_A\rangle = \langle N_A\rangle_c = Np$

$$\langle N_A^2\rangle_c = (\Delta N_A)^2 \underset{\langle N_A^2\rangle - \langle N_A\rangle^2}{=} N(p-p^2) = Npq$$

$$\longrightarrow \frac{\Delta N_A}{N} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}} \quad !!$$

Mittelwert immer schärfer für $N \to \infty$

• Grenzfall für $N \to \infty$:

$p_N(N_A) \longrightarrow$ Gaußsche Verteilung

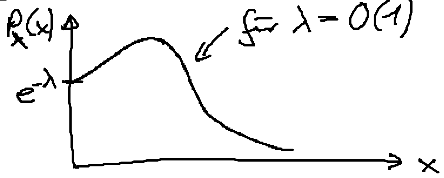
zentraler Grenzwertsatz (s. Kap. 3.5)

(ii) Poisson-Verteilung:

- Geg: Voneinander unabhängige, „seltene" Einzelereignisse in festem Bereich (Zeit, Strecke, Fläche, ...), die mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen

  Ges: Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für x Einzelereignisse mit $\langle x \rangle = \lambda$:

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}} \quad , \quad x = 0, 1, \dots \qquad (3.22)$$



- Bsp: (1) radioaktiver Zerfall in Zeit T

  Anzahl mittlere Zerfälle $\lambda = \alpha T$, α... Zerfallrate

$$\longrightarrow \quad P_T(x) = \frac{(\alpha T)^x e^{-\alpha T}}{x!}$$

  .... Wahrscheinlichkeit für x Zerfälle in T

  (2) Dart mit $\underbrace{F(A) \ll F}_{\text{Treffer ist seltenes Ereignis}}$ ($\longleftrightarrow$ Verbindung zur Binomialverteilung s.u.)

- charakteristische Funktion:

$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} \left(\lambda e^{-ik}\right)^x e^{-\lambda} = \exp\left[\lambda\left(e^{-ik} - 1\right)\right] \quad (3.23)$$

$$\longrightarrow \ln G(k) = \lambda\left(e^{-ik} - 1\right) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \qquad (3.24)$$

$$\xrightarrow[(3.16)]{} \quad \text{Kumulanten:} \quad \boxed{\langle x^n \rangle_c = \lambda} \qquad (3.25)$$

insbesondere: $\dfrac{\Delta x}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{\langle x^2 \rangle_c}}{\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$

• Herleitung von $P_\lambda(x)$ als Grenzfall der Binomialverteilung (3.21):

$p \longrightarrow 0$ „seltenes Ereignis"

$N \longrightarrow \infty$

so daß: $\langle N_A \rangle = Np = \lambda =$ konst.

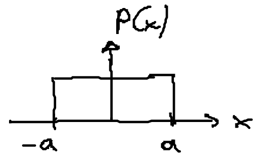
$$\boxed{P_N(N_A) \longrightarrow P_\lambda(N_A) = \frac{\lambda^{N_A} e^{-\lambda}}{N_A!}} \quad (3.26)$$

Beweis: Übung!?

b) Kontinuierliche Verteilungen:

(i) homogene Verteilung

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (3.27)$$



• Momente:
$$\langle x^n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{a(n+1)} a^{n+1}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bew.: Übung

• charakt. Funktion:
$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \frac{\sin ka}{ka}, \quad G(0) = 1 \text{ ... Normierung!}$$

Bew: Übung

• Kumulanten?

(ii) Normal-/Gaußsche-Verteilung

s.o.

(iii) Exponentialverteilung:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

(Wahrscheinlichkeit der Lebensdauer* eines radioakt. Elements, das mit der Rate λ zerfällt)

Momente, charakt. Funktion, Kumulanten (s. Übung)

3.4 Mehrdimensionale Verteilungen

- stochastische Variablen: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

  $P(\underline{x})\, d^n x$ ... Wahrscheinlichkeit für $[\underbrace{x_1 + dx_1}_{[x_1,\, x_1+dx_1]}, \dots, x_n + dx_n]$

- unabhängige stochastische Variable: x, y

$$\boxed{P(x,y)\,dx\,dy = P(x)\,P(y)\,dx\,dy} \quad (3.29)$$

... Multiplikationsregel

- Def: Korrelationsfunktionen:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{ij} &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \\ &= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \end{aligned}} \quad (3.30)$$

.... Kovarianzmatrix

zeigt an: Korrelationen von Fluktuationen um $\langle x_i \rangle$ und $\langle x_j \rangle$

Bsp: $P(x,y) = P(x)\,P(y)$

$$\longrightarrow \quad C_{xy} = \int dx\,dy\; P(x)\,(x - \langle x \rangle)\; P(y)\,(y - \langle y \rangle)$$

$$= 0!$$