3.2 Eigenschaften von $P(x)$

b) Charakteristische Funktion und Kumulanten

- **Def.:** $$\boxed{G(k) = \int dx\, e^{-ikx} P(x) = \langle e^{-ikx} \rangle} \qquad (3.13)$$

- erzeugende Fkt. der Kumulanten:
$$\boxed{\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c} \qquad (3.16)$$

(3.17)

$$\longrightarrow \quad \langle x \rangle_c = \langle x \rangle$$
$$\langle x^2 \rangle_c = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \Delta x^2$$
$$\langle x^3 \rangle_c = \langle x^3 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2\langle x \rangle^3 = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle$$
$$\langle x^4 \rangle_c = \langle x^4 \rangle - 4\langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 + 12\langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6\langle x \rangle^4$$
$$\neq \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle$$
$$\vdots$$

… „wesentliche Momente" von $P(x)$

- Umkehrung:

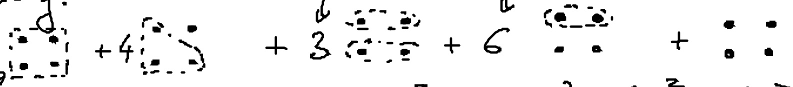
$$\langle x \rangle = \langle x \rangle_c$$
$$\langle x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_c + \langle x \rangle_c^2 \qquad (3.18)$$
$$\langle x^3 \rangle = \langle x^3 \rangle_c + 3\langle x^2 \rangle_c \langle x_c \rangle + \langle x \rangle_c^3$$
$$\langle x^4 \rangle = \langle x^4 \rangle_c + 4\langle x^3 \rangle_c \langle x_c \rangle + 3\langle x^2 \rangle_c^2 + 6\langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c^2 + \langle x \rangle_c^4$$

Anzahl der verschiedenen Kombinationen aus 3 Elementen: $\binom{3}{2} = 3$

$\frac{1}{2}\binom{4}{2}$ $\qquad$ $\binom{4}{2}$

- graphische Darstellung:

Bsp.



$$\langle x^4 \rangle = \langle x^4 \rangle_c + 4\langle x_c^3 \rangle \langle x_c \rangle + 3\langle x^2 \rangle_c^2 + 6\langle x_c^2 \rangle \langle x \rangle_c^2 + \langle x \rangle_c^4$$

Cluster $\hat{=} \langle \dots \rangle_c$

allgemein:
$$\langle x^m \rangle = \sum_{\{p_n\}}{}' \; m! \prod_n \frac{1}{p_n!\,(n!)^{p_n}} \langle x^n \rangle_c^{p_n}$$

p_n .... Anzahl der Cluster mit Ordnung n

$\sum'_{\{p_n\}}$ .... über alle Cluster-Gruppen $\{p_n\}$ mit $\sum_n \overset{\text{Ordnung}}{n}\, \overset{\text{Anzahl}}{p_n} = m$

$\prod_n \frac{m!}{p_n! \, (n!)^{p_n}}$ ... mögliche Realisierungen der Clustergruppe $\{p_n\}$

- **Bsp:** Gaußsche Verteilung (3.12) $\quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$

  (i) $G(k) = \exp\left[-\frac{k^2\sigma^2}{2} - i k x_0\right]$ (3.19)

  (ii) $\ln G(k) = -ikx_0 - \frac{k^2\sigma^2}{2} \xrightarrow[(3.16)]{} \boxed{\begin{aligned} \langle x\rangle_c &= x_0 \\ \langle x^2\rangle_c &= \sigma^2 \end{aligned}}$ (3.20)

  $\left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n\rangle_c\right)$

  $\langle x^3\rangle_c = \langle x^4\rangle_c = \ldots = 0$!

  bestimmen Gaußsche Verteilung!

3.3 Beispiele

a) Diskrete Verteilungen:

(i) Binomial-Verteilung

- Geg: Einzelexperiment mit 2 Ausgängen

  also: $x = A, B$ mit $P(A) = p$

  $P(B) = q = 1-p$

Ges: Wahrscheinlichkeit für N_A Ausgänge A bei N Einzelexperimenten

$$\boxed{P_N(N_A) = \underbrace{\binom{N}{N_A}}_{= \frac{N!}{N_A!\,(N-N_A)!}} p^{N_A}\, q^{N-N_A}} \quad (3.21)$$

... Binomialkoeffizient

- Bsp: (1) Würfel: $\quad$ A... werfe 6 $\quad p(A) = p = \frac{1}{6}$

  B ... " keine 6 $\quad p(B) = q = \frac{5}{6}$

(2) Münze: A ... Kopf , B ... Zahl

(3) Dart „ohne Geschicklichkeit"

A ... treffe ● , $P(A) = \dfrac{F(A)}{F}$

B ... treffe Rest $\quad P(B) = 1 - P(A)$

• charakteristische Funktion:

$$G_N(k) = \langle e^{-ikN_A} \rangle = \sum_{N_A} e^{-ikN_A}\, p_N(N_A) \overset{(3.21)}{=} \sum_{N_A} \binom{N}{N_A} \left(p e^{-ik}\right)^{N_A} q^{N-N_A}$$

$$= \left(p e^{-ik} + q\right)^N$$

$$\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c \overset{(3.14)}{=} Np$$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 \overset{(3.16)}{=} Npq$$

1. $\ln G_N(k) = N \underbrace{\ln\left(p e^{-ik} + q\right)}_{\ln G_1(k):\ \text{für einen Versuch}}$ $\Big\}$ Kumulanten für N Versuche = Kumulanten für 1 Versuch × N

2. Kumulanten:

ein Versuch: Momente $\langle N_A^n \rangle = 1^n p + 0^n q = p$

N Versuche: $\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 \underset{\langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2}{=} N(p - p^2) = Npq$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\Delta N_A}{N} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}} \quad !!$$

Mittelwert immer schärfer für $N \to \infty$

• Grenzfall für $N \to \infty$:

$$p_N(N_A) \xrightarrow[\text{zentraler Grenzwertsatz}]{} \text{Gaußsche Verteilung}$$

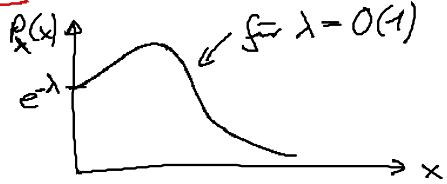
(s. Kap. 3.5)

(ii) Poisson-Verteilung:

- Geg: Voneinander unabhängige, „seltene" Einzelereignisse in festem Bereich (Zeit, Strecke, Fläche, ...), die mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen

  Ges: Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für x Einzelereignisse mit $\langle x \rangle = \lambda$:

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad \boxed{P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}} \quad , \quad x = 0, 1, \dots \tag{3.22}$$



- Bsp: (1) radioaktiver Zerfall in Zeit T

  Anzahl mittlerer Zerfälle $\lambda = \alpha T$, α ... Zerfallrate

$$\longrightarrow \quad P_T(x) = \frac{(\alpha T)^x e^{-\alpha T}}{x!}$$

  .... Wahrscheinlichkeit für x Zerfälle in T

  (2) Dart mit $\underbrace{F(A) \ll F}_{\text{Treffer ist seltenes Ereignis}}$ ($\leftrightarrow$ Verbindung zur Binomialverteilung s.u.)

- charakteristische Funktion:

$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} \left(\lambda e^{-ik}\right)^x e^{-\lambda} = \exp\left[\lambda\left(e^{-ik} - 1\right)\right] \tag{3.23}$$

$$\longrightarrow \ln G(k) = \lambda\left(e^{-ik} - 1\right) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \tag{3.24}$$

$\xrightarrow{(3.16)}$ Kumulanten: $\boxed{\langle x^n \rangle_c = \lambda}$ (3.25)

insbesondere: $\dfrac{\Delta x}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{\langle x^2 \rangle_c}}{\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$

• Herleitung von $P_\lambda(x)$ als Grenzfall der Binomialverteilung (3.21):

$p \longrightarrow 0$, „seltenes Ereignis"

$N \longrightarrow \infty$

so daß: $\langle N_A \rangle = Np = \lambda = \text{konst.}$

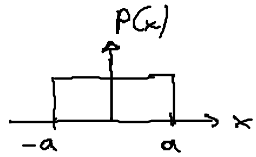
$$\boxed{P_N(N_A) \longrightarrow P_\lambda(N_A) = \frac{\lambda^{N_A} e^{-\lambda}}{N_A!}} \qquad (3.26)$$

Beweis: Übung!?

b) Kontinuierliche Verteilungen:

(i) homogene Verteilung

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \qquad (3.27)$$



• Momente:
$$\langle x^n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{a(n+1)}\, a^{n+1}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bew.: Übung

• charakt. Funktion:
$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \frac{\sin ka}{ka}, \qquad G(0) = 1 \; \ldots \text{ Normierung!}$$

Bew: Übung

• Kumulanten?

(ii) Normal-/Gaußsche-Verteilung

s.o.

(iii) Exponentialverteilung:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (3.28)$$

(Wahrscheinlichkeit der Lebensdauer*) eines radioakt. Elements, das mit der Rate λ zerfällt)

Momente, charakt. Funktion, Kumulanten (s. Übung)

3.4 Mehrdimensionale Verteilungen

- stochastische Variablen: $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

  $P(\underline{x})\, d^n x$ ... Wahrscheinlichkeit für $[\underbrace{x_1 + dx_1}_{[x_1,\, x_1+dx_1]}, \ldots, x_n + dx_n]$

- unabhängige stochastische Variable: x, y

$$\boxed{P(x,y)\,dx\,dy = P(x)\,P(y)\,dx\,dy} \qquad (3.29)$$

... Multiplikationsregel

- <u>Def:</u> Korrelationsfunktionen:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{ij} &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \\ &= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \end{aligned}} \qquad (3.30)$$

.... Kovarianzmatrix

zeigt an: Korrelationen von Fluktuationen um $\langle x_i \rangle$ und $\langle x_j \rangle$

<u>Bsp:</u> $P(x,y) = P(x)\,P(y)$

$$\longrightarrow \quad C_{xy} = \int dx\,dy\; P(x)\,(x - \langle x \rangle)\; P(y)\,(y - \langle y \rangle)$$
$$= 0!$$