4.4.3 Hydrodynamische Gleichungen mit Dissipation

- Boltzmann-Gl.: $\mathcal{L}[f] = \frac{df}{dt}\Big|_{Stoß}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{mit } \mathcal{L}[f] = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\underline{p}\cdot\underline{\nabla}_q + \underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\right] \\ &\left(\tfrac{\underline{p}}{m} = \underline{u}+\underline{c}\right) = \left[\frac{d}{dt} + \underline{c}\cdot\underline{\nabla}_q + \frac{1}{m}\underline{F}\cdot\underline{\nabla}_c\right]\end{aligned}} \quad (4.45)$$

- Problem: $\frac{df_0}{dt}\Big|_{Stoß} = 0$, aber $\mathcal{L}[f_0] \neq 0$, f_0 s. (4.29) lokales GG

- Näherungslösung: „1. Ordnung"
  (i) $f = f_0(1+\Delta)$ mit $\Delta \ll 1$
  (ii) Relaxationszeitnäherung für Stoßterm:

$$\frac{df}{dt}\Big|_{Stoß} = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$$

in Gl. (4.45): $\mathcal{L}[f_0 + f_0\Delta] = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$

& $\mathcal{L}[f_0\Delta] \ll \mathcal{L}[f_0] \longrightarrow \mathcal{L}[f] \approx \mathcal{L}[f_0]$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\Delta \approx -\tau \frac{1}{f_0}\mathcal{L}[f_0] = -\tau\,\mathcal{L}[\ln f_0]} \quad (4.46)$$

berechne $\mathcal{L}[\ln f_0]$ & Annahme $n(q,t)$, $\underline{u}(q,t)$, $T(q,t)$ in f_0 lösen (4.42) – (4.44)

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad \boxed{\begin{aligned} &f = f_0(1+\Delta) \\ &\text{mit } \Delta = -\tau\frac{m}{k_B T}\left(c_i c_j - \frac{\delta_{ij}}{3}\underline{c}^2\right) D_{ij} - \tau\left(\frac{m\underline{c}^2}{2k_B T} - \frac{5}{2}\right)\frac{c_i}{T}\nabla_i T\end{aligned}} \quad (4.47)$$

$D_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$ ... Deformationsrate

• Mittelwerte:

$$\boxed{\langle A\rangle = \int d^3p\, A\, f_0(1+\Delta) = \langle A(1+\Delta)\rangle_0} \quad (4.48)$$

• Spannungstensor „1. Ordnung":

$$T_{ij} \overset{(4.35)}{=} -m\langle c_i c_j\rangle \overset{(4.47)}{=} -m\left[\langle c_i c_j\rangle_0 - \frac{\tau m}{k_B T}\langle c_i c_j \left(c_k c_l - \frac{\delta_{kl}}{3} c^2\right)\rangle_0 D_{kl}\right]$$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$\langle c_i c_j\rangle_0 = n\frac{k_B T}{m}\delta_{ij}$

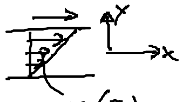
$\langle c_i c_j c_k c_l\rangle_0 = n\left(\frac{k_B T}{m}\right)^2 \times \left(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)$

$$\boxed{T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \underbrace{2\eta\left(D_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}D_{kk}\right)}_{T'_{ij}\text{ ... viskoser Spannungstensor}}} \quad (4.49)$$

mit $p = n k_B T$ ... Druck

$\eta = n k_B T \tau$ ... Scherviskosität

Deutung: (i) Scherströmung:



• $D_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}D_{kk} \neq 0 \longrightarrow T'_{ij}$

• nicht zeitumkehrinvariant: $T'(-D_{ij}) = -T'(D_{ij})$

$\longrightarrow$ Dissipation

$\longrightarrow$ Relaxation von Schermode ins GG

• $\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{D}} = D_{ii} = \mathrm{div}\,\underline{u}$ ... Spur von $\underline{\underline{D}}$

also: $\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3}\mathbb{1}\,\mathrm{div}\,\underline{u} = 0$ für $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{3}\mathbb{1}\,\mathrm{div}\,\underline{u}$!! reine Kompression

NB: $\xrightarrow{(4.42)} \frac{d}{dt}n = -n\,\mathrm{div}\,\underline{u} = 0 \;\hat{=}$ inkompressible Strömung

(ii) keine extra Volumenviskosität

kein Beitrag: $T'_{ij} \sim D_{ii} = \mathrm{div}\,\underline{u}$

• Wärmestromdichte „1. Ordnung":

$$q_i \overset{(4.38)}{=} \langle c_i \frac{m}{2} c^2\rangle \overset{(4.47)}{=} -\frac{m\tau}{2}\langle \left(\frac{m c^2}{2k_B T} - \frac{5}{2}\right) c_i c_k c^2\rangle_0 \frac{\nabla_k T}{T}$$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{q} = -\varkappa \nabla_q T \\ \text{mit } \varkappa = \frac{5}{2} n \frac{k_B^2 T}{m}\tau\end{array}} \quad (4.50)$$

... thermische Leitfähigkeit

$\underline{q} \sim -\nabla_q T \longrightarrow \underline{q}$ gleicht $\nabla_q T$ aus

$\longrightarrow$ Relaxation ins GG

• Hydrodynamische Gleichungen:

$$(4.34) \longrightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\underline{\nabla}_q \cdot (n \underline{u}) \qquad (4.51)$$

$$(4.36) \ \xrightarrow[F_i = 0]{\nabla_j T_{ij} = \dots} \quad mn \frac{d}{dt}\underline{u} = -\underline{\nabla}_q p + \eta \underline{\nabla}_q^2 \underline{u} + \frac{1}{3}\eta \underline{\nabla}_q (\underline{\nabla}_q \cdot \underline{u}) \qquad (4.52)$$

$$(4.38) \ \xrightarrow[-\underline{\nabla}_q \cdot \underline{q}, \ T_{ij}\nabla_i u_j]{ne = \frac{m}{2}\langle \underline{c}^2 \rangle = \frac{3}{2} n k_B T} \quad \frac{d}{dt} T = \frac{2\kappa}{3n k_B} \underline{\nabla}_q^2 T - \frac{2}{3} T \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} + \frac{2}{3n k_B} T_{ij}' \nabla_i u_j \qquad (4.53)$$

Bem: (1) Gl. (4.52) $\equiv$ Navier-Stokes-Gl. für kompressible Flüssigkeiten

aber: Viskosität für reine Kompression: $\eta_k + \frac{1}{3}\eta$ statt $\frac{1}{3}\eta$!

(2) Gl. (5.53): für $\nabla_i u_j = 0 \longrightarrow$ reine Diff. Gl. für T

$T_{ij}' \nabla_i u_j$ ... nichtlinearer Term in $\underline{u}$!

• Modenanalyse: (wie in Kap. 4.4.2) $\sim e^{-i(\omega t - \underline{k}\cdot\underline{r})}$

2 diffusive Schermoden:

Dispersionsrelation: $\omega_{1/2} = -i \frac{\eta}{m\bar{n}} k^2$ ($\bar{n}$ ... mittlere Dichte)

Dämpfungsrate $-i\omega \longrightarrow 0$ für $k \to 0$

$\hat{=}$ hydrodynamische Mode

1 diffusive „Temperaturmode" ω_3

2 gedämpfte Schallwellen

$$\omega_{4/5} = \pm c_s k - i k^2 \left(\frac{2\eta}{3m\bar{n}} + \frac{2\kappa}{15 k_B \bar{n}} \right) + O(\tau^2)$$

5. Statistische Ensemble

• Ziel: $\boxed{\text{Zugang zu makroskop. Eigenschaften von Vielteilchen-Systemen durch Mittelung über viele mikroskop. Realisierungen}}$

insbesondere: $\underbrace{S, U, F, H, G, \ldots}_{\text{thermodynam. Potentiale}}$

- **Weg:** Wähle Ensemble von Mikrozuständen durch Festlegung von Randbedingungen $\rightarrow$ Charakterisieren die Makrozustände
- **Beachte:** $\boxed{\text{Im thermodynam. Limes } N \to \infty \text{ sind alle Ensemble äquivalent}}$

5.1. Mikrokanonisches Ensemble

- **Def:** $\boxed{\text{Alle zugänglichen Mikrozustände eines abgeschlossenen Systems (also mit Energie } U = \text{konstant, und } V, N, = \text{konstant) bilden das mikrokan. Ensemble.}}$

- Liouville Theorem: $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\{\varrho, H\}$

  stationärer Zustand = thermisches GG: mögl. Lsg. $\varrho_{eq} = \varrho(H = U) = \text{konstant}$

$\longrightarrow$ Postulat gleicher a priori Wahrscheinlichkeit für Mikrozustände mit Energie U:

$$P(s) = \frac{1}{g(U)} \qquad (5.1)$$

mit $g(U)$ ... Anzahl aller zugänglichen Mikrozustände mit Energie U [und V, N]

- Postulat der Boltzmannschen Entropie:

$$\boxed{S := k_B \ln g(U)} \qquad (5.2)$$

  mit $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ ... Boltzmannsche Konstante

- QM: i indiziert Eigenzustände mit Energie-EWE
- klass. Mechanik:

$$\boxed{g(U) = \frac{1}{N!} \int \frac{1}{h^{3N}} \, d\Gamma' \quad \text{mit } d\Gamma = \prod_i d^3q_i \, d^3p} \qquad (5.3)$$