

## 4.3 Die Boltzmann-Gleichung

### 4.3.1 "Herleitung" bzw. Motivation

• Boltzmann-Gl.:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right) f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Sto\ss}}$$

$$\text{mit } \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Sto\ss}} = \int d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 K(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) [f_3 f_4 - f f_2]$$

$$= G - V \quad (4.17)$$

$G \int d^3 q d^3 p \dots$  Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit  
 in  $\int d^3 q d^3 p$  hinein gestreut werden  
 aus  $\int d^3 q d^3 p$  heraus

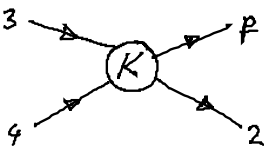
$$f = f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}_1, t) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}_1, t)$$

$$f_i = f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}_i, t) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}_i, t) \quad i \geq 2$$

Bedeutung: Änderung von  $f$  durch Stoßprozesse

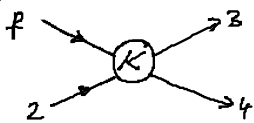
$K(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \dots$  Übergangswahrscheinlichkeit  
 für  $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \rightarrow \mathbf{p}, \mathbf{p}_2$

(i)  $G$  (Gewinnterm)



"erzeugt" Teilchen mit Impuls  $\mathbf{p}$

(ii)  $V$  (Verlustterm)



"vernichtet" Teilchen mit Impuls  $\mathbf{p}$

(iii)  $K(\dots) f_i f_j d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \dots$  Zahl der Stoßprozesse pro Zeiteinheit  
 im Volumen  $d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4$

• Symmetrien von  $K$ :

(i) Vertauschbarkeit der Teilchen

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = K(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}; \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_3) \quad (4.18)$$

(ii) Isotropie des Raumes: sei  $D \in O(3)$

$$K(D\mathbf{p}, D\mathbf{p}_2; D\mathbf{p}_3, D\mathbf{p}_4) = K(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \quad (4.19)$$

insbesondere:  $\partial p = -p$

(iii) Zeitumkehrinvarianz:

$$K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(-p_3, -p_4; -p_1, -p_2) \quad (4.20)$$

$$(ii), (iii) \rightarrow K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(p_3, p_4; p_1, p_2) \quad (4.21)$$

• allgemeine Herleitung von (4.17) aus BBGKY-Hierarchie:

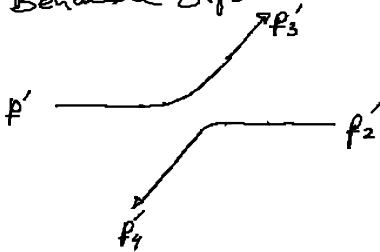
s. M. Kardar, Statistical Physics of Particles

• Explizite Gestalt des Stoßterms:

(i) Impuls- und Energieerhaltung:

$$K(p_1, p_2; p_3, p_4) \sim \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_3^2}{2m} - \frac{p_4^2}{2m}\right)$$

(ii) Behandle Stoß im Schwerpunkt system ('):



Relativ koordinaten: Streuung eines Teilchens am anderen  
(vgl. Keplerproblem) hier 2 an 1

Intensität des Teilchenstrahl

$I =$  Zahl der anfliegenden Teilchen 2 mit Impuls  $p_2^{(1)}$  pro  
Zeit und Fläche (= Strahldichte)  
= Dichte \* Geschw.

$$I = \int f(p_1, p_2) d^3 p_2 |v_1 - v_2| \quad (4.23 a)$$

$dN(\Omega) \dots$  Zahl der pro Zeit in das Raumwinkel element  $d\Omega$   
um Richtung  $\hat{\Omega}$  gestreute Teilchen

$\rightarrow$  differentieller Streuquerschnitt:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega}} \quad (4.23)$$

$$\rightarrow dN = \frac{d\sigma}{d\Omega} I d\Omega$$



$\xrightarrow{z.B.}$  Verlustform  $V = - \int dN \underbrace{f(q, p, t)}_{\text{Dichte der Teilchen 1}}$

(4.23)  $= - \int d\Omega \left| \frac{d\Omega}{d\Omega} \right| f$

(4.23a)  $= - \int d\Omega d^3 p_2 \left| \frac{d\Omega}{d\Omega} \right| |v_1 - v_2| f f_2$

$G = \dots$

$\Rightarrow \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Sto\ss}} = \int d^3 p_2 d\Omega \left| \frac{d\Omega}{d\Omega} \right| |v_1 - v_2| \left[ \underbrace{f(q, p_3, t) f(q, p_4, t)}_{f_3 f_4} - \underbrace{f(q, p_1, t) f(q, p_2, t)}_{f f_2} \right] \quad (4.24)$

Bem:  $f(q, p_3, t) f(q, p_4, t)$   
 über Erhaltungssätze verknüpft mit  $p_1, p_2$   
 hier wichtig: nur von den Sto\ss, molekulare Chaos"  
 d.h. keine Korrelationen

### 4.3.2 Das H-Theorem

Theorem:

Falls  $f(q, p, t)$  die Boltzmann-Gleichung erfüllt, gilt für  $H(t) = \int d^3 q d^3 p f(q, p, t) \ln f(q, p, t)$ ,  
 daß  $\frac{dH}{dt} \leq 0$  (4.25)

→ Boltzmann Gl. beschreibt irreversible Vorgänge, obwohl die zugrunde liegenden mikroskop. Gln. reversible Prozesse erlauben!

• Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \int dV \left( \frac{\partial f}{\partial t} \ln f + f \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= \int dV \frac{\partial f}{\partial t} (1 + \ln f) \\ &= - \int dV (1 + \ln f) \left( \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + F \cdot \nabla_p \right) f + \int dV \frac{df}{dt} \Big|_{\text{stet}} (1 + \ln f) \\ &= - \int dV \left( \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + F \cdot \nabla_p \right) f \ln f + \text{ " " " " } \end{aligned}$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 Oberflächenterm  $\rightarrow 0$   
 da  $f \ln f \rightarrow 0$  für  $f \rightarrow 0$

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} \Big|_{\bar{f}} = \int d^3 q_1 d^3 p_1 d^3 q_2 d^3 p_2 d^3 q_3 d^3 p_3 K(p_1, p_2; p_3, p_4) [f_1 f_2 - f_3 f_4] (1 + \ln f_1)$$

$f = f_1$   
 $q = q_1$   
 $p = p_1$

K invariant unter  $1 \leftrightarrow 2$  und  $1 \leftrightarrow 3$   
 $3 \leftrightarrow 4$  und  $2 \leftrightarrow 4$

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow f_2 f_1 - f_4 f_3 \\ &f_3 f_4 - f_1 f_2 \\ &f_4 f_3 - f_2 f_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{-\frac{1}{4} \int d^3 q_1 d^3 p_1 \dots K(\dots) [f_1 f_2 - f_3 f_4] \ln \frac{f_1 f_2}{f_3 f_4}} \quad (4.2c)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0}$   
 (Zeige für  $f_1 f_2 \geq f_3 f_4$ )

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} \leq 0 \quad \text{qed}$$

• Bemerkungen:

- (i) -  $H \sim$  Informationsentropie
- $H \sim$  Boltzmann-Entropie
- für  $f = \frac{1}{g} = \text{konst.} \rightarrow H \sim \ln g$

H-Theorem ist  
 Bsp. für Entropie-  
 zuwachs

(ii) Grad für Irreversibilität:

- (1) Annahme des molekularen Chaos
- (2) „Vergrößerung“ der Längs- und  
 Zeitskala

Verlust an Infor-  
 mation über  
 System

### 4.3.3. Gleichgewichtseigenschaften

(i) Gleichgewichtsverteilung:

- Gas im Gleichgewicht, falls  $\frac{dH}{dt} = 0 \quad \hat{=} \text{Stoß km verschindet}$

$$(4.26) \rightarrow f_1 f_2 = f_3 f_4 \rightarrow \underbrace{\ln f_1 + \ln f_2}_{\text{vor Stoß}} = \underbrace{\ln f_3 + \ln f_4}_{\text{nach Stoß}}$$

erfüllt dual additive Größen, die bei Stoß erhalten bleiben  
 $\rightarrow$  Stoßinvarianten = Erhaltungsgröße

$\chi^i = p_i$	$i=1,2,3$	... Impuls	(4.27)
$\chi^4 = \frac{p^2}{2m}$		... kinetische Energie	
$\chi^5 = 1$		... Teilzahl	

$$\rightarrow \ln f = \alpha(q) + \sum \alpha_i(q) \cdot p_i - \beta(q) \frac{p^2}{2m}$$

$$\rightarrow f(q, p) = N(q) \exp \left[ \sum \alpha_i(q) \cdot p_i - \beta(q) \frac{p^2}{2m} \right] \quad (4.28)$$

• lokales Gleichgewicht:

Normierung:  $\int d^3p f(q, p) = n(q, t)$  ... Teilzahl dichte

$$(4.28) \rightarrow n = N(q) \prod_{i=1}^3 \int dp_i \exp(\alpha_i \cdot p_i - \beta \frac{p_i^2}{2m}) \quad i=1,2,3$$

$$[\text{quad. Erg.}] = N(q) \prod_{i=1}^3 \int dp_i \exp \left[ -\frac{\beta}{2m} \left( p_i - \frac{m \alpha_i}{\beta} \right)^2 + \frac{m \alpha_i^2}{2\beta} \right]$$

$$= N(q) \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{m \alpha_i^2}{2\beta} \right) \quad (4.28a)$$

(4.28a) in (4.28)  
 & Umkehrung

$$f(q, p, t) = n(q, t) \frac{1}{[2\pi m k_B T(q, t)]^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(p - m u(q, t))^2}{2m k_B T(q, t)} \right]$$

mit  $n(q, t)$  ... Teilzahl dichte  
 $k_B T(q, t) = \beta^{-1}$  ... lokale Temperatur (s.u.)  
 $m u(q, t) = \langle p \rangle = \frac{m \alpha}{\beta}$  ... lokaler mittlerer Impuls

(4.29)

... lokale Maxwell-Verteilung  
 „ Gleichgewichtsverteilung