

4.3 Die Boltzmann-Gleichung

4.3.1 "Herleitung" bzw. Motivation

• Boltzmann-Gl.:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right) f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}}$$

$$\text{mit } \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}} = \int d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 K(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) [f_3 f_4 - f f_2]$$

$$= G - V \quad (4.17)$$

$G \int d^3 q d^3 p \dots$ Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit
 in $\{ \text{Volumen } d^3 q d^3 p \text{ hinein} \}$ gestreut werden
 aus $\{ \text{Volumen } d^3 q d^3 p \text{ heraus} \}$

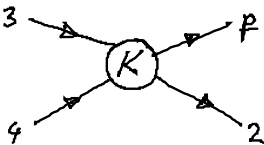
$$f = f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}_1, t) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}_1, t)$$

$$f_i = f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}_i, t) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}_i, t) \quad i \geq 2$$

Bedeutung: Änderung von f durch Stoßprozesse

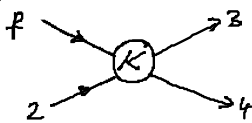
$K(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \dots$ Übergangswahrscheinlichkeit
 für $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \rightarrow \mathbf{p}, \mathbf{p}_2$

(i) G (Gewinnterm)



"erzeugt" Teilchen mit Impuls \mathbf{p}

(ii) V (Verlustterm)



"vernichtet" Teilchen mit Impuls \mathbf{p}

(iii) $K(\dots) f_i f_j d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \dots$ Zahl der Stoßprozesse pro Zeiteinheit
 im Volumen $d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4$

• Symmetrien von K :

(i) Vertauschbarkeit der Teilchen

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = K(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}; \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_3) \quad (4.18)$$

(ii) Isotropie des Raumes: sei $D \in O(3)$

$$K(D\mathbf{p}, D\mathbf{p}_2; D\mathbf{p}_3, D\mathbf{p}_4) = K(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \quad (4.19)$$

insbesondere: $\partial p = -p$

(iii) Zeitumkehrinvarianz:

$$K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(-p_3, -p_4; -p_1, -p_2) \quad (4.20)$$

$$(ii), (iii) \rightarrow K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(p_3, p_4; p_1, p_2) \quad (4.21)$$

• allgemeine Herleitung von (4.17) aus BBGKY-Hierarchie:

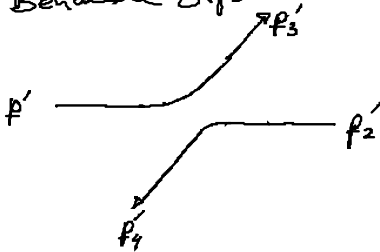
s. M. Kardar, Statistical Physics of Particles

• Explizite Gestalt des Stoßterms:

(i) Impuls- und Energieerhaltung:

$$K(p_1, p_2; p_3, p_4) \sim \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_3^2}{2m} - \frac{p_4^2}{2m}\right)$$

(ii) Behandle Stoß im Schwerpunkt system ('):



Relativ koordinaten: Streuung eines Teilchens am anderen (vgl. Keplerproblem) hier 2 an 1

Intensität des Teilchenstrahl

$I =$ Zahl der anfliegenden Teilchen 2 mit Impuls $p_2^{(1)}$ pro Zeit und Fläche (= Strahldichte) = Dichte * Geschw.

$$I = \int f(p_1, p_2) d^3 p_2 |v_1 - v_2| \quad (4.23 a)$$

$dN(\Omega) \dots$ Zahl der pro Zeit in das Raumwinkel element $d\Omega$ um Richtung $\hat{\Omega}$ gestreute Teilchen

\rightarrow differentieller Streuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega} \quad (4.23)$$

$$\rightarrow dN = \frac{d\sigma}{d\Omega} I d\Omega$$



$$\begin{aligned} \xrightarrow{z.B.} \text{Verlustterm } V &= - \int dN \underbrace{f(q, p, t)}_{\text{Dichte der Teilchen 1}} \\ &\stackrel{(4.23)}{=} - \int d\Omega \left| \frac{d\Omega}{d\Omega} \right| I f \\ &\stackrel{(4.23a)}{=} - \int d\Omega d^3 p_2 \left| \frac{d\Omega}{d\Omega} \right| |v - v_2| f f_2 \end{aligned}$$

$$G = \dots$$

$$\Rightarrow \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Sto\ss}} = \int d^3 p_2 d\Omega \left| \frac{d\Omega}{d\Omega} \right| |v - v_2| \left[\underbrace{f(q, p_3, t) f(q, p_4, t)}_{f_3 f_4} - \underbrace{f(q, p_1, t) f(q, p_2, t)}_{f f_2} \right] \quad (4.24)$$

Bem: $f(q, p_3, t) f(q, p_4, t)$
 über Erhaltungssätze verknüpft mit p_1, p_2
 hier wichtig: nur von den Sto\ss, molekulare Chaos"
 d.h. keine Korrelationen

4.3.2 Das H-Theorem

Theorem:

Falls $f(q, p, t)$ die Boltzmann-Gleichung erfüllt, gilt für $H(t) = \int d^3 q d^3 p f(q, p, t) \ln f(q, p, t)$,
 daß $\frac{dH}{dt} \leq 0$ (4.25)

→ Boltzmann Gl. beschreibt irreversible Vorgänge, obwohl die zugrunde liegenden mikroskop. Gl. reversible Prozesse erlauben!

4.3.3. Gleichgewichtseigenschaften

(i) Gleichgewichtsverteilung:

- Gas im Gleichgewicht, falls $\frac{dH}{dt} = 0 \quad \hat{=} \text{Sto\ss} + m \text{ versch.}$

$$(4.26) \rightarrow f_1 f_2 = f_3 f_4 \rightarrow \underbrace{\ln f_1 + \ln f_2}_{\text{vor Sto\ss}} = \underbrace{\ln f_3 + \ln f_4}_{\text{nach Sto\ss}}$$

erfüllt dual additive Größen, die bei Sto\ss erhalten bleiben
 \rightarrow Sto\ssinvarianten = Erhaltungsgrößen

$\chi^i = p_i$	$i=1,2,3$... Impuls	
$\chi^4 = \frac{p^2}{2m}$... kinetische Energie	(4.27)
$\chi^5 = 1$... Teilchenzahl	

$$\rightarrow \ln f = \alpha(q) + \sum \alpha_i(q) \cdot p_i - \beta(q) \frac{p^2}{2m}$$

$$\rightarrow f(q, p) = N(q) \exp \left[\sum \alpha_i(q) \cdot p_i - \beta(q) \frac{p^2}{2m} \right] \quad (4.28)$$

- lokales Gleichgewicht:

Normierung: $\int d^3p f(q, p) = n(q, t)$... Teilchendichte

$$(4.28) \rightarrow n = N(q) \prod_{i=1}^3 \int dp_i \exp \left(\alpha_i \cdot p_i - \beta \frac{p_i^2}{2m} \right) \quad i=1,2,3$$

$$[\text{quad. Int.}] = N(q) \prod_{i=1}^3 \int dp_i \exp \left[-\frac{\beta}{2m} \left(p_i - \frac{m \alpha_i}{\beta} \right)^2 + \frac{m \alpha_i^2}{2\beta} \right]$$

$$= N(q) \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{m \alpha_i^2}{2\beta} \right) \quad (4.28a)$$

(4.28a) in (4.28)
 & Umkehrung

$$f(q, p, t) = n(q, t) \frac{1}{[2\pi m k_B T(q, t)]^{3/2}} \exp \left[-\frac{(p - m u(q, t))^2}{2m k_B T(q, t)} \right]$$

mit $n(q, t)$... Teilchendicht

$$k_B T(q, t) = \beta^{-1} \dots \text{lokale Temperatur (s.u.)}$$

$$m u(q, t) = \langle p \rangle = \frac{m \alpha}{\beta} \dots \text{lokaler mittlerer Impuls}$$

(4.29)

... lokale Maxwell-Verteilung
 „ Gleichgewichtsverteilung