(ii) mit $S(k) = \frac{1}{1-\varrho c(k)} \approx \frac{1}{1-c_0+c_2k^2}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} &S(k) \approx \frac{1}{c_2}\,\frac{1}{\xi^{-2}+k^2} \\ &\text{mit } \xi(T) = \left(\frac{c_2}{1-c_0}\right)^{1/2} \longrightarrow \infty,\ T \to T_c \\ &\qquad = \left[c_2 S(k=0)\right]^{1/2} \underset{(6.53)}{=} \left(c_2 \frac{\chi_T}{\chi_T^{id}}\right)^{1/2} \\ &\text{... Korrelationslänge} \end{aligned}} \quad (6.70)$$

... Ornstein–Zernicke–Form von $S(k)$ nahe T_c für kleine k (≈ 1914)

- Bemerkungen:

(1) Annahme: $\chi_T \sim (T-T_c)^{-\gamma}$ für $T \to T_c$

$$\longrightarrow \boxed{\xi(T) \sim (T-T_c)^{-\gamma/2} \text{ für } T \to T_c} \quad (6.71)$$

γ ... kritische Exponenten!

hier: Universalitätsklasse des Flüssig-Gas-Phasenübergangs

Wert: Landau-Theorie: $\gamma = 1$

Experiment & Renormierungsgruppentheorie für kritische Phänomene: $\gamma = 1{,}24$

(2) Deutung von ξ:

$$h(r) = \frac{1}{\varrho}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\left[S(k)-1\right]$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{h(r) \overset{(6.70)}{\approx} \frac{1}{4\pi\varrho c_2}\,\frac{e^{-r/\xi}}{r} - \left[\frac{1}{\varrho}\,\delta(r)\right]} \quad (6.72)$$

... Yukawa-Form der Korrelationen mit Reichweite ξ!

(3) bei $T=T_c$:

"$\xi = \infty$" $\longrightarrow$ $$\boxed{h(r)\Big|_{T_c} \sim \frac{1}{r} \quad \text{bzw.} \quad S(k)\Big|_{T_c} \sim \frac{1}{k^2}} \qquad (6.73)$$

... algebraischer Abfall
≡ weitreichende Korrelationen!

- Messung von $S(k)$:
für Streuintensität $I(k)$ gilt: $$\boxed{\frac{1}{I(k)} \overset{(6.48)}{\sim} \frac{1}{S(k)} = c_2\left(\xi^{-2} + k^2\right)} \qquad (6.74)$$

bestätigt durch Experiment! Bsp. Argon

- sehr nahe T_c und sehr kleine k:
Abweichungen von (6.74) im Experiment
Renormierungsgruppen-Theorie:

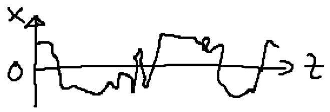
$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} h(r)\Big|_{T_c} &\sim \frac{1}{r^{1+\eta}} \\ S(k)\Big|_{T_c} &\sim \frac{1}{k^{2-\eta}} \end{aligned} \quad \text{mit } \eta = 0{,}04} \qquad (6.75)$$

7. Theorie der linearen Antwort & Fluktuations-Dissipationstheorem

- Lit.: 1. David Chandler, Introduction to Modern Statistical Mechanics
  2. Hansen & Mc Donald
  3. Original-Lit.: R. Kubo, J. Phys. Soc. Jap. 12, 570 (1957)

- Motivation:

Dynamik eines Systems nahe am thermischen GG Antwort auf eine wirkende Kraft $x = \chi F$	$\longleftrightarrow$	Eigenschaft des Systems im thermischen GG $\langle x(0)\, x(t)\rangle$ ... Zeitkorrelationsfunktion

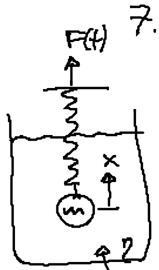


$\langle \dots \rangle$ über viele Realisierungen von $x(t)$ im thermischen GG

NB: Ergodenhypothese
$$\langle x(0)x(t)\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(t')\,x(t'+t)\,dt'$$

- vereinfachte Version der Ableitung der Theorie der L. A.

7.1 Modellsystem: harmonischer Oszillator

- 

Newtonsche Grundgleichung:
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) \quad (7.1)$$
$\alpha = 6\pi\eta a$ ... Reibungskoeffizient
a ... Radius Kugel

viskose Flüssigkeit (Wärmebad)

ω_0 ... Eigenfrequenz

- Behandlung im Komplexen: $x \in \mathbb{C}$
- Lösung von (7.1) für harmonische Kraft:
$$\left.\begin{aligned} F(t) &= F(\omega)\, e^{-i\omega t} \\ \text{Lsg. Ansatz}\quad x(t) &= x(\omega)\, e^{-i\omega t}\end{aligned}\right\} \longrightarrow (7.1) \quad \text{mit } \frac{\alpha}{m} = 2\gamma$$
$$\longrightarrow \quad m\left(-\omega^2 - 2\gamma i\omega + \omega_0^2\right) x(\omega) = F(\omega)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(\omega) &= \chi(\omega)\, F(\omega) \\ \text{mit } \chi(\omega) &= \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma)} \\ &= \chi'(\omega) + i\,\chi''(\omega)\end{aligned}} \quad (7.2)$$

... dynamische Suszeptibilität
Antwortfunktion

NB: $[Fx]$ = Energie

- Greensche Funktion:
$$\left.\begin{aligned} \text{bel. Kraft:}\quad F(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega)\, e^{-i\omega t} \\ \text{Auslenkung:}\quad x(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi}\, x(\omega)\, e^{-i\omega t}\end{aligned}\right\} \text{Fouriertrafo}$$

$$(7.2) \xrightarrow[\text{satz der FT}]{\text{Faltungs-}} \quad \boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t')\,F(t')\,dt'} \quad (7.3)$$

mit $\chi(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \chi(\omega)\, e^{-i\omega\tau}$

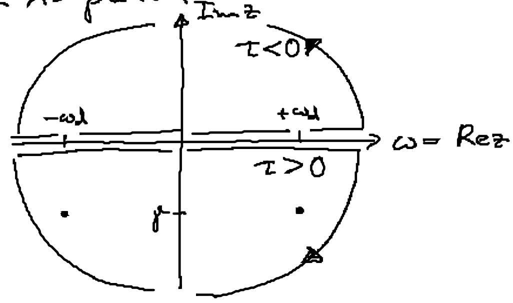
... Greensche Funktion von (7.1)

Bem.: (i) $\chi(\tau)$ ist Lsg. von (7.1) für $F(t') = \delta(t')$

(ii) Kausalität: $\chi(\tau) = 0$ für $\tau < 0$!

· Bestimmung von $\chi(\tau)$: Integration im Komplexen

$$\boxed{\chi(\omega) = \frac{1}{-m(\omega-\omega_+)(\omega-\omega_-)} \quad \text{mit } \omega_\pm = -i\gamma \pm \omega_d, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} \qquad (7.4)$$



$$\longrightarrow \chi(\tau) = \oint \frac{dz}{2\pi}\, \chi(z)\, e^{-iz\tau} - \underbrace{\int \ldots dz}_{=0}$$

$$= \mp 2\pi i\, \mathrm{Res}\, \chi(z)\, e^{-iz\tau}$$

$$\longrightarrow \quad \tau < 0: \quad 0$$

$$\tau > 0: \frac{i}{2m\omega_d}\, e^{-\gamma\tau}\Big[\overbrace{e^{-i\omega_d\tau}}^{\text{von } \omega_-} - \overbrace{e^{i\omega_d\tau}}^{\omega_+}\Big]$$

$\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) = \sin x$ $\longrightarrow$

$$\boxed{\chi(\tau) = \Theta(\tau)\, \frac{1}{m\omega_d}\, e^{-\gamma\tau} \sin\omega_d\tau} \qquad (7.5)$$

Stufen-Fkt. $\Theta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ 1, & \tau > 0 \end{cases}$