

1.6.2. Randwertaufgabe : 2. Grundaufgabe

Erinnerung: 1. Grundaufgabe [geg.: ϕ_α auf Leiteroberfläche
ges.: $\phi(r), Q_\alpha$]

jetzt: geg.: Leiter L_α (Oberfläche S_α) $\alpha = 1, \dots, n$
mit Ladung Q_α

Raumladungsdichte $\rho(r)$ im
Aufraum

ges.: $\phi(r), \phi_\alpha$



Lösung: Zurückführen auf Grundaufgabe 1 durch
Zusammenhang zwischen ϕ_α und Q_α

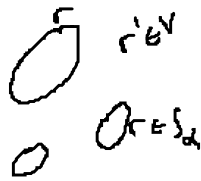
Es gilt:
$$Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^n C_{\alpha\beta} \phi_\beta$$

mit Kapazitätskoeffizienten $C_{\alpha\beta}$

Beweis:

$$Q_\alpha = - \epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \nabla \phi(r)$$

$$\stackrel{\text{Lösung}}{=} - \epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \nabla_r \left[\int d^3r' G(r-r') \rho(r') \right]$$



$$\begin{aligned}
 & -\epsilon_0 \int_{S_\alpha} d\vec{f} \cdot \nabla_r \left[\sum_{\beta} \phi_\beta \int_{S_\beta} d\vec{f}' \cdot \nabla_{r'} G(\underline{r} - \underline{r}') \right] \\
 &= -\epsilon_0 \int_{L_\alpha} d^3r \int_V d^3r' \underbrace{\Delta_r G(\underline{r} - \underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}') = 0 \quad \substack{r \in L_\alpha \\ r' \in V}} \rho(r') \\
 & \quad - \sum_{\beta=1}^n \phi_\beta \underbrace{\epsilon_0 \int_{S_\alpha} d\vec{f} \cdot \nabla_r \int_{S_\beta} d\vec{f}' \cdot \nabla_{r'} G(\underline{r} - \underline{r}')}_{=: C_{\alpha\beta}} \\
 &= \sum_{\beta=1}^n C_{\alpha\beta} \phi_\beta
 \end{aligned}$$

Aus der Symmetrie $G(\underline{r} - \underline{r}') = G(\underline{r}' - \underline{r})$

$$\left[\begin{array}{l} \text{aus Green'schen Formel} \\ \psi = G(\underline{r} - \underline{r}') \\ \varphi = G(\underline{r}' - \underline{r}) \end{array} \right]$$

folgt $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$.

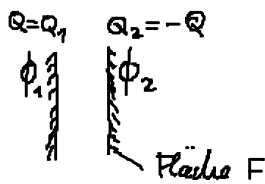
Einheit: $1F = 1 \frac{C}{V} = 1 \text{ Farad}$ (M. Faraday 1791 - 1867)

Betrachte speziell einen Leiter mit ϕ_L

$$C = \frac{Q}{\phi_L} \quad \text{Kapazität eines Leiters}$$

[rein geometrische
Größe]

Plattenkondensator



$$Q_1 = C_{11} \phi_1 + C_{12} \phi_2$$

$$Q_2 = C_{21} \phi_2 + C_{22} \phi_1$$

$$[C_{12} = C_{21} = C']$$

$$[C_{11} = C_{22} = C]$$

Spezialfall $Q_1 + Q_2 = 0$

$$\Leftrightarrow Q = C \phi_1 + C' \phi_2$$

$$-Q = C' \phi_1 + C \phi_2$$

$$0 = (C + C')(\phi_1 + \phi_2) \Rightarrow C = -C'$$

$$C = -C' = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2}$$

[$C_{\alpha\beta}$ ist pos. definit
nicht singular]

Inverse der Kapazitätsmatrix

$$\phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^n C_{\alpha\beta}^{-1} Q_\beta$$

eingesetzt in die Lösung der 1. Grundaufgabe liefert
 $\phi(r)$ für gegebenes $Q_\beta, g(r)$.

Damit ist die 2. Grundaufgabe gelöst, falls $G(r-r')$
gefunden / konstruiert wurde.

[Webseite zur Veranschaulichung
www.falstad.com]


1.6.3. Feldenergie im Bereich mit Leitern

Energie des Feldes im Außenraum (für $\rho(\underline{r})=0$)

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r (\underline{E}(\underline{r}))^2$$

Betrachte differentielle Änderungen der Randbed. auf dem L_V

\Rightarrow



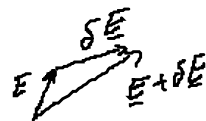
 differentielle Änderung
 $Q_\alpha \rightarrow Q_\alpha + \delta Q_\alpha$
 $\phi_\alpha \rightarrow \phi_\alpha + \delta \phi_\alpha$

Lösung $\phi(\underline{r}) \rightarrow \phi(\underline{r}) + \delta \phi(\underline{r})$

Räumliche Annäherung ist ungeändert \Rightarrow Vertauschung von ∇ und δ

$$\left[\begin{array}{l} \Delta \phi(\underline{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \delta \phi(\underline{r}) = 0 \quad \text{in } V \\ \underline{E}(\underline{r}) = -\nabla \phi(\underline{r}) \quad \Rightarrow \quad \underline{\delta E}(\underline{r}) = -\nabla \delta \phi(\underline{r}) \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \delta W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r 2 \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{\delta E}(\underline{r})$$

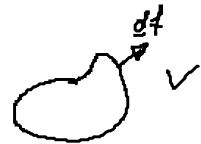


$$= -\epsilon_0 \int_V d^3r \underbrace{\nabla \phi(\underline{r}) \cdot \underline{\delta E}(\underline{r})}_{\nabla \cdot (\phi \delta \underline{E}) - \phi \nabla \cdot \delta \underline{E}}$$

$$\delta W = -\epsilon_0 \int_V d^3r \nabla \cdot (\phi \delta \underline{E})$$

$$\left[\begin{array}{l} \nabla \cdot \delta \underline{E} = \delta \underbrace{\nabla \cdot \underline{E}}_0 = 0 \\ \text{in } V \quad \text{da } \rho = 0 \end{array} \right]$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} \epsilon_0 \sum_{\alpha} \oint_{S_{\alpha}} d\vec{f} \cdot (\phi(r) \delta \underline{E}(r))$$



Vorzeichen-
wechsel

$$\stackrel{\phi(r)|_{S_{\alpha}} = \phi_{\alpha}}{=} \epsilon_0 \sum_{\alpha} \phi_{\alpha} \oint_{S_{\alpha}} d\vec{f} \cdot \delta \underline{E}$$

$$= \sum_{\alpha} \phi_{\alpha} \delta Q_{\alpha}$$

$$Q_{\alpha} = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} \phi_{\beta}$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \phi_{\alpha} C_{\alpha\beta} \delta \phi_{\beta}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

"Friede"

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \phi_{\alpha} \delta \phi_{\beta} +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \underbrace{C_{\beta\alpha}}_{C_{\alpha\beta}} \phi_{\beta} \delta \phi_{\alpha}$$

$$\delta W = \delta \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \phi_{\alpha} \phi_{\beta} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \phi_{\alpha} \phi_{\beta}}$$

Feldenergie

2. Stationäre Ströme und Magnetfeld

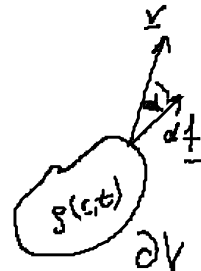
2.1. Kontinuitätsgleichung

Bewegte Ladungen \rightarrow elektrischer Strom I

Experimentelle Erfahrung: $Q(t) = \int_V d^3r \rho(r, t)$

globaler Erhaltungssatz

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(r, t) = - \oint_{\partial V} \delta I$$



$$\delta I = \frac{\rho dV}{dt} = \frac{\rho \int_{dS} |v| dt |d\vec{l}| \cos \alpha}{dt} = \underbrace{\rho v}_{j(r, t)} d\vec{l}$$

(Ladung, die durch $d\vec{l}$ pro Zeit aus V herausströmt)

Elektrische Stromdichte $\underline{j}(r, t) := \rho(r, t) \underline{v}(r, t)$

lokale Größe

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(r, t) = - \oint_{\partial V} \overbrace{d\vec{l} \cdot \underline{j}}^{\delta I} \stackrel{\text{Gew } 3}{=} - \int_V d^3r \operatorname{div} \underline{j} \quad \text{für alle } V$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) + \operatorname{div} \underline{j}(r, t) = 0}$$

Kontinuitätsgleichung

lokale Erhaltungsgröße

speziell: stationäre Ladungsverteilung

$$\operatorname{div} \underline{j} = 0 \quad (\text{nicht notwendig } \underline{j} = 0)$$