

4.3.1. Elektrische Dipolstrahlung

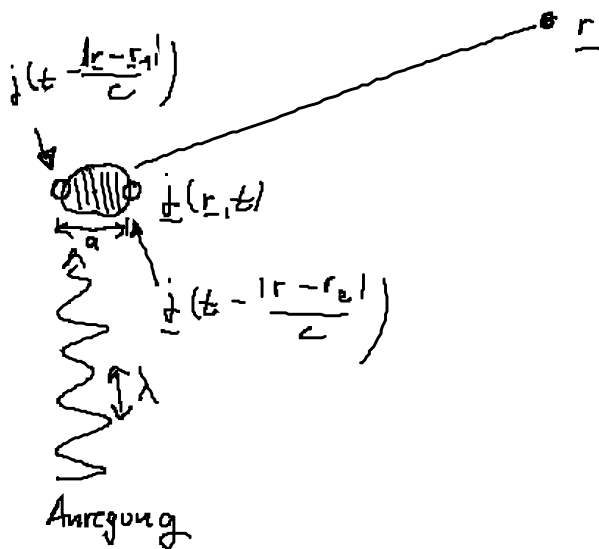
was bisher geschah:

Entwicklung des Vektorpotenzial $\underline{A}(\underline{r}, t)$
in 2 Schritten

① lokalisierte Ladungsverteilung

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} (\underline{r} \cdot \underline{r}') + \dots$$

② zeitliche Anregung der Ladungsverteilung



zeitlicher Unterschied
der außenliegenden Punkte
ist klein gegen Laufzeit

$$j\left(t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right) \approx j(t) + \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{cr} \frac{\partial j(t)}{\partial t}$$



$$\bar{t} = t - \frac{r}{c}$$

• falls Anregung EM Welle

$$\lambda_{\text{Anregung}} \gg a$$

Bemerkung: • Gute Näherung für Rayleigh Streuung
• schlecht für Mie Streuung (Wassertröpfchen $a \approx \lambda$)

Ergebnis:

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{j}(\underline{r}', t) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \underline{j}(\underline{r}', t)$$

$$\approx A^{(1)}(\underline{r}, t) + A_m^{(2)}(\underline{r}, t) + A_Q^{(2)}(\underline{r}, t)$$

el. Dipolstrahlung

magn.
Dipolstrahlung

el.
Quadrupolstr.

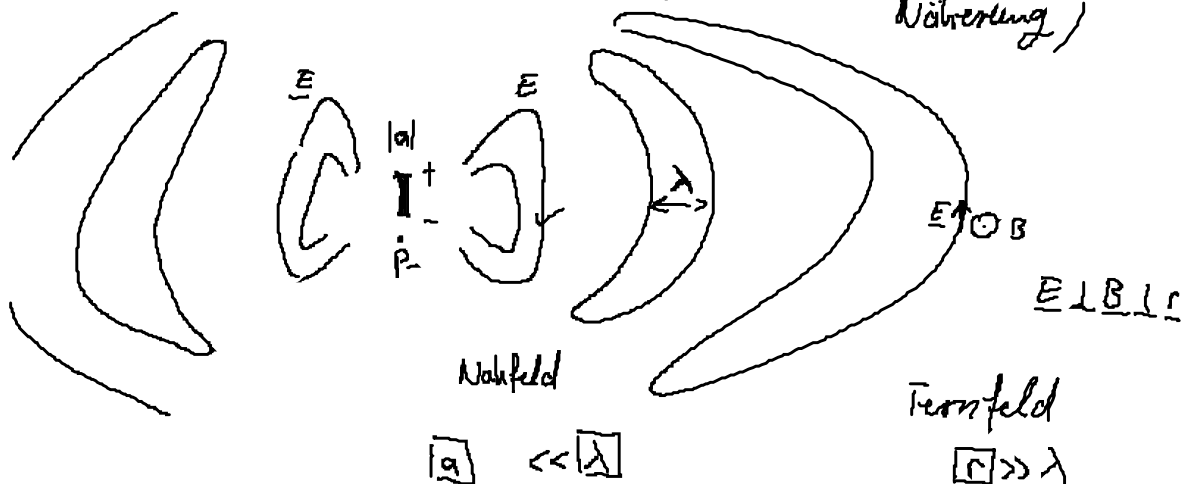
für $\phi^{(1)}$ unterscheidet man zwischen Nah und Fernfeld

$$\phi^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{cr^2} \underline{r} \cdot \underline{\dot{p}}(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r^3} \underline{r} \cdot \underline{p}(t - \frac{r}{c}) \right\}$$

$$\frac{1}{r}$$

Fernfeld

Nahfeld (quasistatische Näherung)



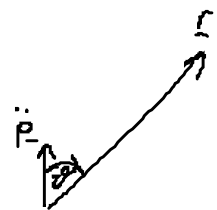
Energieabstrahlung im Fernfeld

Poynting-Vektor

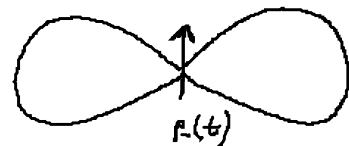
$$\underline{s} = \underline{E} \times \underline{H} = -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times \underline{E} = -\frac{c}{\mu_0 r} \underline{B} \times (\underline{B} \times \underline{r})$$

$$= -\frac{c}{\mu_0 r} \left\{ \underbrace{(\underline{B} \cdot \underline{r}) \underline{B}}_0 - B^2 \underline{r} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{r^4} \underbrace{\left(\ddot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r} \right)^2}_{|\ddot{\underline{p}}|^2 r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{1}{r} \underline{r}$$



$$\underline{s} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} |\ddot{\underline{p}}|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \frac{\underline{r}}{r}$$



$$p(t) = p_0 e^{i\omega t} : |\ddot{\underline{p}}|^2 = p_0^2 \omega^4$$

Abstrahlcharakteristik
des Hertz'schen Dipol
stark richtungsabhängig!

- d.h. blaues energiereiches Licht
wird mehr gestreut als rotes

→ Himmelblau

[Rayleigh - Streuung]

- Gesamtenergie der Abstrahlung

$$\int \underline{s} \, d\Omega \, dr \quad \rightarrow \quad P_{\text{Larmor}} = \iiint_{\vartheta, r} \underline{s} \, 2\pi r^2 \sin^2 \vartheta = \frac{q^2 \dot{v}^2 (6 - \frac{r}{c})}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

für eine bewegte Punktladung mit Geschw. $v(t)$.

→ Energieverlust bei Beschleunigung!

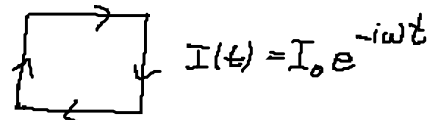
Larmor'sche Strahlungsabstrahlung.

4.3.2. Magnetische Dipol, el. Quadrupolstrahlung

Die niedrigste Ordnung der Multipolentwicklung von $\underline{A}(\underline{r}, t)$ resultiert für eine quellentfreie Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}', \tau)$:

$$\underline{\nabla}' \cdot \underline{j}(\underline{r}', \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \rho(\underline{r}', \tau) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\underline{p}}(\tau) = \int d^3 r' \underline{r}' \dot{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}(\tau) \equiv 0$$



Beispiel: geschlossene
Leiterschleife
(Rahmenantenne)

2. Ordnung

$$A^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3 r' \frac{(\underline{r} \cdot \underline{r}')}{r} \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \underline{j}(\underline{r}', \tau)$$

$$\text{mit } \otimes \quad (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}', \tau) = \frac{1}{2} (\underline{r}' \times \underline{j}) \times \underline{r} + \frac{1}{2} \left[(\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} + (\underline{r} \cdot \underline{j}) \underline{r}' \right]$$

$$\text{und } \underline{\nabla}' \cdot \left\{ x_k' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} \right\} = \left[(\underline{r} \cdot \underline{r}') \dot{j}_k + x_k' (\underline{r} \cdot \underline{j}) \right] + x_k' (\underline{r} \cdot \underline{j}) \underline{\nabla}' \cdot \underline{j}$$

$$\rightarrow \int d^3 r$$

$$\rightarrow \text{(Gauß)} \quad \circ = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' [(\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} + (\underline{r} \cdot \underline{j}) \underline{r}']}_{\text{magn. Dipolmoment}} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \rho'$$

folgt:

$$\int d^3 r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}', \tau) = \underbrace{\left[\frac{1}{2} \int d^3 r' (\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}', \tau)) \right]}_{\text{magn. Dipolmoment}} \times \underline{r} + \frac{1}{2} \int d^3 r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{r}' \rho'$$

$$\underline{Q} \cdot \underline{r}$$

(Zugum wir gleich)

Der 2. Term lässt sich durch den elektrischen Quadrupoltensor \underline{Q} schreiben

$$\underline{Q}(\tau) = \int d^3 r' \rho(\underline{r}', \tau) (3 \underline{r}' \otimes \underline{r}' - r'^2 \underline{1}) =: \underline{\tilde{Q}} - \frac{1}{3} (\text{sp } \underline{\tilde{Q}}) \underline{1}$$

umgeichtetes Quadrupolmoment

$$\underline{Q} \cdot \underline{r} = 3 \int d^3 r' \rho(\underline{r}', \tau) \underline{r}' (\underline{r}' \cdot \underline{r})$$

"breathing mode"



gibt keinen Beitrag
zu \underline{E} , \underline{B} !
(verschwindet durch Eichbedingung)

Also:

$$A^{(z)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\underline{m}(t) \times \underline{r} + \frac{1}{6} \underline{\dot{Q}}(t) \cdot \underline{r} \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \underbrace{\frac{1}{r^3} \underline{m} \times \underline{r} + \frac{1}{cr^2} \underline{\dot{m}} \times \underline{r}}_{\text{magn. Dipolstrahlung}} + \underbrace{\frac{1}{6r^3} \underline{\dot{Q}} \cdot \underline{r} + \frac{1}{6cr^2} \underline{\ddot{Q}} \cdot \underline{r}}_{\text{el. Quadrupolstrahlung}} \right\}$$

Die magn. Dipolstrahlung lässt sich mit

$$\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m}(t - \frac{r}{c}) = \frac{1}{r^3} \underline{m}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r} + \frac{1}{cr^2} \underline{\dot{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r}$$

schreiben als

$$\boxed{A_m^{(z)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m}(t - \frac{r}{c}) \right)} \quad \text{magn. Dipolstrahlung}$$

Skalares Potenzial aus Lorenz-Eichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r}, t) = -c^2 \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \nabla \cdot \left(\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m} \right) \equiv 0$$

zeitunabhängig

$$\phi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}) \stackrel{!}{=} 0$$

o.B.d.A

kein skal. Potenzial

Berechnung der Felder in Fernfeldnäherung:

$$\underline{B}_{\text{M}}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} \left[\ddot{\underline{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \underline{r} \right] \times \underline{r} \quad (r \gg \lambda \gg a)$$

$$\underline{B}_{\text{el. Q.}}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} \left[\frac{1}{6} \ddot{\underline{Q}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \underline{r} \right] \times \underline{r} \quad "$$

$$\underline{E} = c \left(\underline{B} \times \frac{\underline{r}}{r} \right) \quad \text{wie für el. Dipolstrahlung}$$