

4er-Potential

$$\boxed{\begin{aligned}\phi^0 &:= \phi \\ \phi^i &:= cA^i \quad (i=1,2,3)\end{aligned}}$$

Felder \underline{E} , \underline{B}

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}A$$

$$\Rightarrow E^i = -\partial_i\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}cA^i = -\partial_i\phi^0 - \partial_0\phi^i = \partial^i\phi^0 - \partial^0\phi^i \quad (i=1,2,3)$$

$$\underline{B} = \nabla \times A$$

$$\Rightarrow cB^1 = \partial_2 cA^3 - \partial_3 cA^2 = \partial_2\phi^3 - \partial_3\phi^2 = \partial^3\phi^2 - \partial^2\phi^3$$

zyklische Vertauschung:

$$\begin{aligned}cB^2 &= \partial^1\phi^3 - \partial^3\phi^1 \\ cB^3 &= \partial^2\phi^1 - \partial^1\phi^2\end{aligned}$$

Zusammenfassung antisymm. Feldtensor

$$\boxed{F^{\mu\nu} := \partial^\mu\phi^\nu - \partial^\nu\phi^\mu}, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (\mu, \nu=0,1,2,3)$$

Wegen der Antisymmetrie hat $F^{\mu\nu}$ nur 6 unabhängige Komponenten:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lorentz-Transform der Felder

Als Tensor 2. Stufe transformiert sich $F^{\mu\nu}$ wie

$$F'^{\mu\nu} = U^\mu{}_\alpha U^\nu{}_\kappa F^{\alpha\kappa}, \quad U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im einzelnen

$$\begin{aligned}
 E'^1 &= F'^{10} = U^1_{\lambda} U^0_{\kappa} F^{\lambda\kappa} = -\beta\gamma U^0_{\kappa} F^{0\kappa} + \gamma U^0_{\kappa} F^{1\kappa} \\
 &= (\beta\gamma)^2 F^{01} + (\gamma)^2 F^{10} \\
 &= \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_1 F^{10} = E^1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E'^2 &= F'^{20} = U^2_{\lambda} U^0_{\kappa} F^{\lambda\kappa} = U^0_{\kappa} F^{2\kappa} = \gamma F^{20} - \beta\gamma F^{21} \\
 &= \gamma(E^2 - vB^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E'^3 &= F'^{30} = U^3_{\lambda} U^0_{\kappa} F^{\lambda\kappa} = U^0_{\kappa} F^{3\kappa} = \gamma F^{30} - \beta\gamma F^{31} \\
 &= \gamma(E^3 + vB^2)
 \end{aligned}$$

$$B'^1 = \frac{1}{c} F'^{32} = \frac{1}{c} U^3_{\lambda} U^2_{\kappa} F^{\lambda\kappa} = \frac{1}{c} F^{32} = B^1$$

$$\begin{aligned}
 B'^2 &= \frac{1}{c} F'^{13} = \frac{1}{c} U^1_{\lambda} U^3_{\kappa} F^{\lambda\kappa} = \frac{1}{c} U^1_{\lambda} F^{\lambda 3} = -\frac{\beta\gamma}{c} F^{03} + \frac{\gamma}{c} F^{13} \\
 &= \gamma(B^2 + \frac{v}{c^2} E^3)
 \end{aligned}$$

$$B'^3 = \gamma(B^3 - \frac{v}{c^2} E^2)$$

Zusammenfassung:

$E'^1 = E^1$	$B'^1 = B^1$
$E'^2 = \gamma(E^2 - vB^3)$	$B'^2 = \gamma(B^2 + \frac{v}{c^2} E^3)$
$E'^3 = \gamma(E^3 + vB^2)$	$B'^3 = \gamma(B^3 - \frac{v}{c^2} E^2)$

Elektr. u. magn. Felder werden beim Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen in einander transformiert.

Umrechnung

$$\tilde{\phi}^\mu = \phi^\mu + \partial^\mu \varphi$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu} &= \partial^\mu \tilde{\phi}^\nu - \partial^\nu \tilde{\phi}^\mu = \partial^\mu (\phi^\nu + \partial^\nu \varphi) - \partial^\nu (\phi^\mu + \partial^\mu \varphi) \\ &= \underbrace{\partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu}_{F^{\mu\nu}} + \underbrace{\partial^\mu \partial^\nu \varphi - \partial^\nu \partial^\mu \varphi}_0 \\ &= F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

also $F^{\mu\nu}$ reihinvariant!

Homogene Maxwellgl'n

$$(1) \nabla \cdot \underline{B} = \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = 0$$

$$\Rightarrow \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} = 0$$

mit $\partial_1 = -\partial^1, \dots, F^{32} = -F^{23}, \dots$ folgt:

$$\boxed{\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0} \quad \text{zykl. (123)}$$

$1\ 2\ 3 \quad 2\ 3\ 1 \quad 3\ 1\ 2$

$$(2) \nabla \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0$$

$$1. \text{ Komp. : } \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + \frac{\partial}{\partial t} B^1 = 0$$

$$\Rightarrow \partial_2 F^{30} - \partial_3 F^{20} + \partial_0 F^{32} = 0$$

mit $\partial_0 = \partial^0, \partial_2 = -\partial^2, \partial_3 = -\partial^3, F^{32} = -F^{23}, F^{20} = -F^{02}$:

$$\boxed{\partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} = 0} \quad \text{zykl. (023)}$$

zykl. Permut. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ und $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

$$\boxed{\partial^0 F^{13} + \partial^3 F^{01} + \partial^1 F^{30} = 0} \quad \text{zykl. (013)}$$

$$\boxed{\partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} = 0} \quad \text{zykl. (012)}$$

Zusammenfassung der homog. Maxwellgl.:

$$\boxed{\epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} \partial^\nu F^{\lambda\kappa} = 0} \quad \text{oder} \quad \boxed{\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu F_{\lambda\kappa} = 0}$$

"4-Rotation"

mit

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (\mu\nu\lambda\kappa) = \text{gerade Permutation von } (0123) \\ -1 & \text{wenn } (\mu\nu\lambda\kappa) = \text{ungerade " } \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(4-dim. Levi-Civita-Tensor)

3-dim. Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{ikl} \partial^k a^l = (\nabla \times \underline{a})_i$

Bemerkung: (i) $\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$ ist vollständig antisymmetrisch
 (ii) $\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$ transformiert sich unter Lorentz-Transf.:

$$\epsilon'^{\mu\nu\lambda\kappa} = U^\mu_\pi U^\nu_\rho U^\lambda_\sigma U^\kappa_\tau \epsilon^{\pi\rho\sigma\tau}$$

$$= \begin{vmatrix} U^0_0 & U^0_1 & U^0_2 & U^0_3 \\ U^1_0 & U^1_1 & U^1_2 & U^1_3 \\ U^2_0 & U^2_1 & U^2_2 & U^2_3 \\ U^3_0 & U^3_1 & U^3_2 & U^3_3 \end{vmatrix} = \underbrace{(\det U)}_{\pm 1} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$$

Damit $\epsilon'^{\mu\nu\lambda\kappa} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$ ist, muss vereinbart werden, dass

$$\epsilon'^{\mu\nu\lambda\kappa} = \underbrace{(\det U)}_{\pm 1} U^\mu_\pi U^\nu_\rho U^\lambda_\sigma U^\kappa_\tau \epsilon^{\pi\rho\sigma\tau}$$

Damit ist ϵ^{ijkl} ein Pseudotensor

(Verallgemeinerung des 3-dim. Falles ϵ^{ikl} mit
 $(\nabla \times \underline{a})_i = \epsilon^{ikl} \partial_k a_l$)

Pseudovektor = axialer Vektor : behält bei
Punktspiegelung
seine Richtung
bei

polare Vektor \longleftrightarrow

