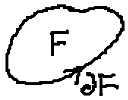
Grundgleichungen der Elektrostatik

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{rot}\, \underline{E} = 0 \\ &\Updownarrow \\ &\underline{E} = -\nabla\phi \\ &\Updownarrow \\ &\oint_{\partial F} \underline{E}\, d\underline{s} = 0 \end{aligned}}$$

wirbelfrei

es ex. Potenzial



Arbeit

$$W = q\int_1^2 \underline{E}\, d\underline{s}$$

$$= -q\int d\phi = q\,(\phi(r_1) - \phi(r_2))$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\varepsilon_0\, \text{div}\, \underline{E} = \rho \\ &\Updownarrow \\ &\varepsilon_0 \oint_{\partial V} \underline{E}\, d\underline{f} = \int_V \rho(r')\, d^3r' \end{aligned}}$$

differenz. Form

Integralform

Gauß'sches Gesetz

$$\varepsilon_0 \nabla \underline{E} = \rho \quad \Big\Downarrow \quad \underline{E} = -\nabla\phi$$

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r)}$$

Poisson-Gleichung

$\downarrow$ wir wissen schon

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \,\frac{\rho(r')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Coulomb Gesetz

Lösung der Poisson-Gl. zu den Randbedingungen $\phi(\underline{r}) \to 0$ für $r \to \infty$.

$\left[\int f(\tau) g(x-\tau) d\tau \right]$

Faltung

1.3. Poisson-Gleichung und Green'sche Funktion

- Allgemeine Lösung der Poisson-Gl. $\Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})$:
  - partielle DGL für $\phi(\underline{r})$
  - wird durch RB eindeutig

Green'sche Funktion

Allgemeine Methode zur Lösung inhomogener (partieller oder gewöhnlicher) DGL für vorgegebene Inhomogenität.

z.B. Mechanik: gedämpfter, getriebener Oszillator

E-Dynamik: Poissongl., inhom. Wellengleichung

QM: Streutheorie

Abstraktes Lösungsschema:

$$\boxed{\Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho} \quad \xrightarrow[\text{Invertieren des Diff.op.}]{\text{Lösung durch}} \quad \boxed{\phi = \tilde{G} \rho}$$

$\Downarrow$ Fourier-Trafo

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, \hat{\phi}(\underline{k}) e^{i\underline{k}\underline{r}}$$

$\Uparrow$

$$\phi(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, G(\underline{r} - \underline{r}') \rho(\underline{r}')$$

$$\boxed{-k^2 \hat{\phi}(\underline{k}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \hat{\rho}(\underline{k})} \quad \xrightarrow[\text{durch Multiplikation}]{\text{Invertierung}} \quad \boxed{\hat{\phi} = \hat{G} \hat{\rho}}$$

$$\hat{G} = \frac{1}{\varepsilon_0 \underline{k}^2}$$

Explizite Durchführung

(i) Lösung für Punktladung bei $\underline{r}''$: $\rho(\underline{r}') = \delta(\underline{r}' - \underline{r}'')$

$$\phi(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, G(\underline{r} - \underline{r}') \, \delta(\underline{r}' - \underline{r}'') = G(\underline{r} - \underline{r}'')$$

d.h. Greensche Funktion $G(\underline{r} - \underline{r}'')$ ist Lösung der Poisson-Gl.

$$\boxed{\Delta_r G(\underline{r} - \underline{r}'') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}'')}$$

für δ-förmige Inhomogenität.

(ii) Dann Lösung für beliebige Inhomogenität $\rho(\underline{r})$ durch Faltung mit G

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r' \, G(\underline{r} - \underline{r}') \, \rho(\underline{r}')$$

- RB

Spezielle RB $\phi(\underline{r}) \to 0$ für $|r| \to \infty$

Beweis: $$\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \rho(r') \, \Delta_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \qquad (1)$$

Problem: Singularität bei $\underline{r} = \underline{r}'$

Fallunterscheidung
$\nearrow$ $\underline{r} \neq \underline{r}'$
$\searrow$ $\underline{r} = \underline{r}'$

$\boxed{\underline{r} \neq \underline{r}' \; a)}$

$$-\Delta_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = -\nabla_r \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$= \nabla_r \frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

$$= \frac{\nabla_r (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} + (\underline{r} - \underline{r}') \nabla_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

$\nabla \cdot \underline{r} = 3$

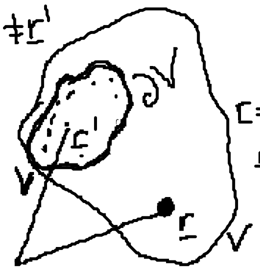
$$= \frac{3}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} - 3(\underline{r}-\underline{r}')\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^5}(\underline{r}-\underline{r}') = 0$$

b) $$\int_V d^3r' \, \nabla_r \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$d\underline{f} = r'^2 \overbrace{\sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}^{d\Omega} \cdot \underline{e}_r$

$\underline{r} \notin V$

$\underline{r} \neq \underline{r}'$



$\underline{r} = \underline{r}'$

$\underline{r} \in V$

$$= -\int_{\partial V} d\underline{f} \, \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = -\oint d\Omega$$

$$= \begin{cases} -4\pi & \text{für } \underline{r} \in \mathring{V} \\ 0 & \text{für } \underline{r} \notin V \end{cases}$$

Ergebnis $$\boxed{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -4\pi \, \delta(\underline{r}-\underline{r}')} \quad (*)$$

Dirac'sche δ-Funktion (δ-Distribution)

$$\int_V d^3r \, \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = \begin{cases} 1 & \underline{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also $$\Delta \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{-4\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, \underbrace{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})$$ Poisson Gl. erfüllt ▩

Es gibt: $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

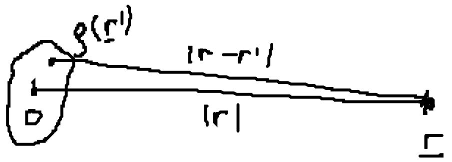
d.h. Greenfkt. ist Lösung der Poisson-Gl. für Punktladung $q=1$ bei $\underline{r}'$.

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad \text{für } \phi(r) \xrightarrow[|r|\to\infty]{} 0$$

[für bel. Ladungsverteilung ρ ist die Lösung
$\phi(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(r')$ (siehe ÜBUNG)]

1.4. Elektrische Multipol-Entwicklung

Betrachte räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\underline{r}')$ in der Umgebung von $\underline{r}'=0$



weit entfernt von Ladungsverteilung

Frage: asymptotisches Verhalten von $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ für $r\to\infty$

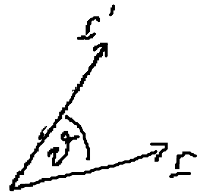
Methode: Entwicklung des Integranden in eine Taylorreihe für $r \gg r'$

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\left(\underline{r}'\cdot\nabla_r\right)^\ell G(\underline{r})$$

$$\phi(\underline{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, (\underline{r}' \cdot \nabla_r)^\ell \, G(\underline{r}) \, \rho(\underline{r}')$$

explizit: $G(\underline{r} - \underline{r}') = \dfrac{1}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|}$ Entwicklung:

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = (r^2 - 2\underline{r}\,\underline{r}' + \underline{r}'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{r'}{r}\cos\vartheta + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$



Durch die für $r' < r$, $|\xi| < 1$ konvergente Reihe

$$\left(1 - 2\frac{r'}{r}\xi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\xi)$$

sind die Legendre-Polynome $P_\ell(\xi)$ definiert (Kugelfunktionen)

Es gilt $P_\ell(\xi) = \dfrac{1}{\ell!}\left[\dfrac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\left(1 - 2t\xi + t^2\right)^{-1/2}\right]_{t=0}$

<u>insbesondere</u>

$$P_0(\xi) = 1$$

$$P_1(\xi) = \xi = \cos\vartheta$$

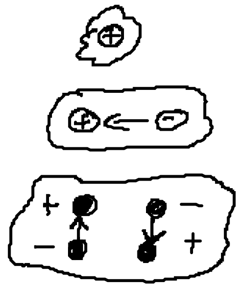
$$P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\vartheta + 1)$$

also

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int d^3r' \, \rho(r') \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos\vartheta)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} Q_l \, r^{-l-1}$$

mit $Q_l = \int d^3r' \, r'^l \, \rho(r') \, P_l(\cos\vartheta)$ "2^l-Pol"



$l=0$: Monopol

$l=1$: Dipol

$l=2$: Quadrupol