Dielektrische Dispersion

$\hat{\chi}(\omega)$

- frequenzabhängige Suszeptibilität

→ komplexe Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\,\varepsilon''(\omega) = (n + i\varkappa)^2 = \tilde{n}^2$$

$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon'$

$2n\varkappa = \varepsilon''$

$\underline{D} = \varepsilon_0\, \varepsilon\, \underline{E}$

- kommt von den Materialgleichungen

kompl. Brechungsindex

- folgt aus Dispersionsrelation $k = \frac{\omega}{c}\tilde{n}$

Zusammenhang von $\varepsilon'(\omega)$ und $\varepsilon''(\omega)$

- folgt direkt aus Kausalitätsprinzip!

Für kausale Funktion $\chi(t)$ gilt: $\chi(t) = \Theta(t)\,\chi(t)$

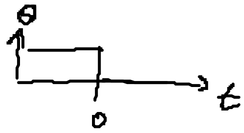
$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t > 0 \\ 1 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Heaviside-Fkt.

Fourier-Trafo : $\hat{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \hat{\Theta}(\omega - \omega') \, \hat{x}(\omega')$

$$\hat{\Theta}(\omega) := \lim_{\sigma \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \, e^{i\omega t - \sigma t}$$

NB Θ



Fourier

$$\int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} [1 - \cos\omega t - i \sin\omega t]$$

-> konvergiert nicht

σ : konvergenz erzeugende Faktor

(Laplace Transformation)

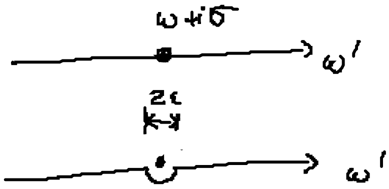
$$= -\lim_{\sigma \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{i\omega - \sigma}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(\omega) = \lim_{\sigma \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega - i\sigma} \hat{x}(\omega')$$

Integrand hat Pol bei $\omega' = \omega + i\sigma$:

Integrationsweg

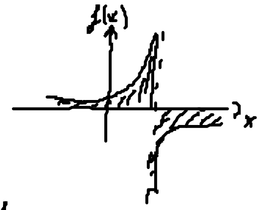
äquivalenter Weg



Zerlegung : $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{x'(\omega')}{\omega' - \omega} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{\omega - \varepsilon} + \int_{\omega + \varepsilon}^{\infty} \right] d\omega' \frac{\hat{x}(\omega')}{\omega' - \omega}$

$$+ \int_{\curvearrowleft} d\omega' \, \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}$$

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{\hat{\chi}}{\omega' - \omega}$$ „Hauptwert"



– für Integrale die auf beschränkten Bereich weder im Riemannschen Sinne noch im Lebesgue'schen Sinn integrierbar sind

$$\int_{\curvearrowleft} d\xi \, \frac{f(\xi)}{\xi} = f(0) \int_{\curvearrowleft} \frac{d\xi}{\xi} = f(0) \, i \int_0^{\pi} d\varphi = i\pi f(0)$$ (halbes Residuum)

$\xi = \varepsilon e^{i\varphi}$

$d\xi = i\xi \, d\varphi$

$$\Rightarrow \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \, \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{1}{2} \hat{\chi}(\omega)$$

Zerlegung in Re und Im mit $\mathrm{Re}\,\hat{\chi}(\omega) = \varepsilon'(\omega) - 1$

$\mathrm{Im}\,\hat{\chi}(\omega) = \varepsilon''(\omega)$

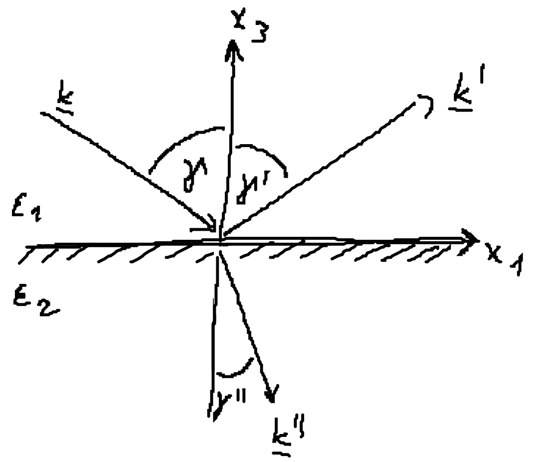
$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) - 1 &= \frac{1}{\pi} \, \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} \\ \varepsilon''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \, \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} \end{aligned}}$$

Kramers-Kronig-Relation

Absorptionsspektrum $\varepsilon''(\omega)$ ist bestimmbar aus $\varepsilon'(\omega)$ oder umgekehrt.

5.7. Brechung und Reflexion

Wellenausbreitung in geschichteten Medien



- ungedämpfte Wellen

transparent $\Rightarrow \varepsilon_i \in \mathbb{R}$

$(\varepsilon_i'' = 0)$

$$\frac{\omega}{c_1} = |\underline{k}| \overset{\text{s.u.}}{=} |\underline{k}'| = \frac{\omega'}{c_1}$$

$$|\underline{k}''| = \frac{\omega''}{c_2}$$

$$c_1 = \frac{c}{n_1} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}$$

$$\left(c_i = \frac{c}{n_i} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_i}} \right)$$

einfallende Welle : $\underline{E} = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$

reflektierte Welle : $\underline{E}' = \underline{E}_0' \, e^{i(\underline{k}'\underline{r} - \omega' t)}$

transmittierte Welle : $\underline{E}'' = \underline{E}_0'' \, e^{i(\underline{k}''\underline{r} - \omega'' t)}$

Grenzbedingungen für Felder

1. $\underline{n} \times (\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}) = 0$ Tangentialkomp.

$\underline{n} \cdot (\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) = \cancel{\sigma}$ stetig Normalkomp.

$\underline{n} \times (\underline{H}^{(1)} - \underline{H}^{(2)}) = \cancel{\underline{g}}$ stetig da keine freien Ladungen oder Ströme

$\underline{n} \cdot (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) = 0$

Grenzbed. für $\underline{E}$ (linear polarisiert)

① $E_1 + E_1' \Big|_{x_3=0} = E_1'' \Big|_{x_3=0}$

$t=0: \quad E_{01} e^{ik_1 x_1} + E_{01}' e^{ik_1' x_1} = E_{01}'' e^{ik_1'' x_1} \quad \Rightarrow k_1 = k_1' = k_1''$

$\underline{r}=0 \quad E_{01} e^{-i\omega t} + E_{01}' e^{-i\omega' t} = E_{01}'' e^{-i\omega'' t} \quad \Rightarrow \omega = \omega' = \omega''$

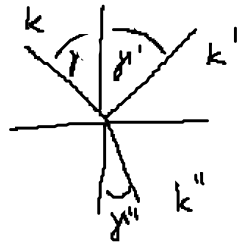
$\Rightarrow E_{01} + E_{01}' = E_{01}''$

$$\boxed{|\underline{k}| = \frac{\omega}{c_1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} \sin\gamma = \sin\gamma' \\ \frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{n_1}{n_2} \end{gathered}}$$

Reflexionsgesetz

Brechungsgesetz



$|k| \sin\gamma = |k'| \sin\gamma' = |k''| \sin\gamma''$

$|k| = \frac{\omega}{c_1}$, $\quad |k''| = \omega / c_2$

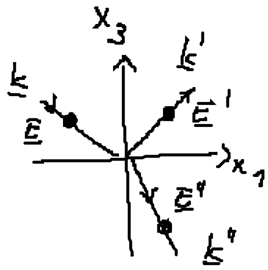
Beshimmung der Amplituden

(a) Polarisation von $\underline{E} \perp$ Einfallsebene

$E_{01} = E_{01}' = E_{01}'' = 0$

$E_{03} = E_{03}' = E_{03}'' = 0$

$(1) \quad \boxed{E_{02} + E_{02}' = E_{02}''}$



Einfallsebene x_3, x_1

Mit $\underline{B}_0 = \frac{c}{\omega}(\underline{k} \times \underline{E}_0) = \frac{c}{\omega} E_{02} \begin{pmatrix} -k_3 \\ 0 \\ k_1 \end{pmatrix}$ folgt für

Tangentialkomp. von $\underline{B}$

$$B_{01} + B_{01}' = B_{01}'' \implies k_3 E_{02} + k_3' E_{02}' = k_3'' E_{02}''$$

Reflexionsgesetz $k_3 = -k_3' \Rightarrow \boxed{k_3(E_{02} - E_{02}') = k_3'' E_{02}''}$ (2)

(1) in (2) $\Rightarrow k_3(E_{02} - E_{02}') = k_3''(E_{02} + E_{02}')$

$$\rightarrow (k_3 - k_3'') E_{02} = (k_3 + k_3'') E_{02}'$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{E_{02}'}{E_{02}} = \frac{k_3 - k_3''}{k_3 + k_3''}} \quad / \quad \boxed{\frac{E_{02}''}{E_{02}} = \frac{2k_3}{k_3 + k_3''}}$$

reflektierte Welle $\qquad$ Ampl.-Anteil der gebrochenen Welle

Drücke k_3'' durch Brechungswinkel μ'' aus!

$$k_3'' = |k''| \cos\mu'' = |\underline{k}| \underbrace{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}_{\frac{\sin\mu''}{\sin\mu''}} \cos\mu''$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{E_{0z}'}{E_{0z}} &= \frac{\cos\mu \sin\mu'' - \sin\mu \cos\mu''}{\cos\mu \sin\mu'' + \sin\mu \cos\mu''} = \frac{\sin(\mu'' - \mu)}{\sin(\mu'' + \mu)} \\ \frac{E_{0z}''}{E_{0z}} &= \frac{2 \sin\mu'' \cos\mu}{\sin(\mu'' + \mu)} \qquad \underline{\text{Fresnel'sche Formeln}} \end{aligned}}$$

Intensitätsverhältnisse $\quad \langle \underline{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, \underline{E} \times \underline{H} \sim |E_0|^2$

$$R_\perp = \frac{|E_{0z}'|^2}{|E_{0z}|^2} = \frac{\sin^2(\mu'' - \mu)}{\sin^2(\mu'' + \mu)}$$

Reflexionskoeffizient

$$T_\perp = \frac{|E_{0z}''|^2}{|E_{0z}|^2} = \frac{4 \sin^2\mu'' \cos^2\mu}{\sin^2(\mu'' + \mu)} = 1 - R_\perp$$

Transmissionskoeffizient