6.4. Transformationsverhalten der Ströme und Felder

Ziel: Ko-/Kontravariante Formulierung der E-Dynamik im Vakuum.

Motivation: Klass. E-Dynamik ist Lorentz-invariant!

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \partial_i j^i = 0$$

in 4er-Form:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad \text{mit} \quad \boxed{(j^\mu) = (c\rho, \underline{j})} \quad \text{4er-Stromdichte}$$

Forderung: Ladungserhaltung soll in allen Inertialsystemen gelten. (j^μ) muss wie ein 4er-Vektor transformieren, damit das Skalarprodukt $\partial_\mu j^\mu$ Lorentz-invariant ist:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \right.$$

Also gilt auch für Ladungs- und Stromdichten:

$$\boxed{\begin{aligned} j'^0 &= \gamma(j^0 - \beta j^1) \\ j'^1 &= \gamma(j^1 - \beta j^0) \end{aligned}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{aligned} \rho' &= \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2} j^1\right) \\ j'^1 &= \gamma(j^1 - \rho v) \end{aligned}}$$

$$j'^2 = j^2, \quad j'^3 = j^3$$

(Für $v \neq 0$ "mischt" die Lorentz-Transformation Ladungsdichte und Komponenten der Stromdichte)

Der 4er-Gradient $(\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, +\nabla\right)$ transformiert bei Lorentz-Trafo kovariant (wie x_μ):

$$(\partial^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla\right) \qquad \left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$$

d'Alembert-Operator durch Ko-/Kontravariante Gradienten:

$$\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = -\partial_\mu \partial^\mu$$

[div] [grad]

4er-Potentiale:

Die elektromagnet. Potentiale ϕ, $\underline{A}$ sind (in der Lorentz-Eichung $\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi = 0$) Lösungen von

$$\left\{ \begin{aligned} \Box \phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Box \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned} \right\} \left(\text{mit } \mu_0 c = \frac{1}{\varepsilon_0 c}\right) \left\{ \begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \phi &= \frac{c\rho}{\varepsilon_0 c} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^0 \\ \partial_\mu \partial^\mu (cA^i) &= \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i \end{aligned} \right.$$

Also:

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\nu} \quad \text{mit} \quad \boxed{\begin{aligned} \phi^0 &:= \phi \\ \phi^i &:= c A^i \end{aligned}} \quad i = 1, 2, 3$$

Analog zu (j^μ) auch für (ϕ^ν):

$$\phi'^0 = \gamma(\phi^0 - \beta \phi^1) \qquad \text{bzw.} \qquad \phi' = \gamma(\phi - v A^1)$$
$$\phi'^1 = \gamma(\phi^1 - \beta \phi^0) \qquad \qquad A'^1 = \gamma\left(A^1 - \frac{v}{c^2}\phi\right)$$

Auch für Lorentz-Eichung:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi = 0 \iff \boxed{\partial_\mu \phi^\mu = 0} \quad \text{Lorentz-invariant}$$

Eichtransformation:

(Erinnerung: so, dass Maxwell-Gln. u. Felder unverändert)

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\underline{A}} &= \underline{A} + \underline{\nabla} F \\ \tilde{\phi} &= \phi - \frac{\partial}{\partial t} F \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} \tilde{\phi}^i &= c\tilde{A}^i = cA^i + \partial_i (cF) \\ &= cA^i - \partial^i (cF) \\ \tilde{\phi}^0 &= \phi^0 - \partial_0 (cF) = \phi^0 - \partial^0 (cF) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\phi}^\mu = \phi^\mu + \partial^\mu \varphi} \quad \boxed{\varphi := -cF}$$

mit beliebiger (Lorentz-invarianter), differenzierbarer, skalarer Funktion $\varphi(x^\mu) = -cF(x^\mu)$ des 4er-Vektors (x^μ).

Ausblick: Feld-Tensor

Felder $\underline{E}, \underline{B}$ folgen per Differentialoperation aus $\phi, \underline{A}$:

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

→ Naheliegende Definition eines Feld-Tensors (Verhalten unter Lorentz-Trafo vgl. metrischer Tensor)

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu \quad ; \quad \begin{aligned} &(\partial^\mu) \text{ 4er-Gradient} \\ &(\phi^\nu) = (\phi, c\underline{A}) \text{ 4er-Pot.} \end{aligned}$$