Nachtrag Kapazitätskoeffizienten:

$\underline{\underline{C}}$ ist pos. definit $\Longleftrightarrow$ $\forall_{x}$ $x^T \underline{\underline{C}} x > 0$

d.h. Diagonalelemente immer pos. ; Determinante pos.

2.2. Magnetische Induktion

Experimentelle Erfahrung

WW zwischen bewegten Ladungen:

Kraft auf Ladung q, die sich mit $\underline{v}$ bewegt

Lorentz-Kraft $\boxed{\underline{F} = q \underline{v} \times \underline{B}(\underline{r})}$

$\underline{B}(\underline{r})$ = magnetische Induktion am Ort $\underline{r}$, erzeugt

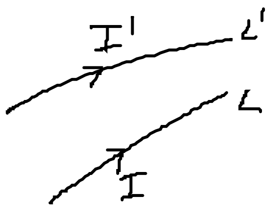
$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}}$$ Ampère Gesetz

Einheit (SI): $[B] = 1 \frac{Vs}{Cm} = 1 \frac{kg \, m^2 \, s}{C \, s^2 \, m^2} = 1T$ "Tesla"

Damit ist $\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$ festgelegt. (nicht wie ε_0 frei wählbar)

Die magn. Induktion beschreibt keine neue WW
(betrachte Transformation ins Ruhesystem einer Ladung)

Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern



Betrachte 2 dünne Leiter L, L' mit zeitkonstanten Strömen

Strom durch L': $\underline{j}\, d^3r' = \rho\, \underline{v}' d^3r' = \underbrace{\rho \frac{d^3r'}{dt}}_{I'} dr'$

$\Rightarrow$ magn. Induktion $\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$

Kraft auf Ladung im Volumenelement d^3r von L:

$$d\underline{F} = \rho\, \underline{v} \times \underline{B}\, d^3r = \underline{j} \times \underline{B}\, d^3r = I\, d\underline{r} \times \underline{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L d\underline{r} \times \left[\int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \right]}$$ Kraft von L' auf L

" $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\underline{b})$ "

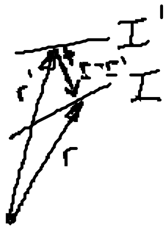
Mit $\underbrace{d\underline{r}}_{} \times (\underbrace{d\underline{r}'}_{} \times \underbrace{(\underline{r} - \underline{r}')}_{}) = (d\underline{r} \cdot (\underline{r} - \underline{r}'))\, d\underline{r}' - (d\underline{r} \cdot d\underline{r}') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')$

und $$\underbrace{\int_L d\underline{r} \, \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} = \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \Bigg|_{L-\text{Anfang}}^{L-\text{Ende}} = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} L \text{ geschlossen} \\ \text{oder} \\ L \text{ in } \infty \end{array}\right]$$

folgt $$\boxed{\underline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \iint_{L L'} (d\underline{r}\, d\underline{r}') \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

für parallele Ströme $(I d\underline{r}\, I' d\underline{r}' > 0)$: Anziehung

" antiparallele " < 0 Abstoßung



$$\left.\begin{array}{l} r \leftrightarrow r' \\ dr \leftrightarrow dr' \\ I \leftrightarrow I' \end{array}\right\} \quad \underline{F} \to -\underline{F}$$

actio = reactio

2.3. Magnetostatische Feldgleichungen

Mit dem Vektorpotenzial $\underline{A}(\underline{r})$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

"Coulomb Eichung"

$\left[\begin{array}{l} \text{nicht eindeutig} \\ \text{Umeichung} \\ \underline{A} \to \underline{A} + \underline{\nabla}\psi \\ \text{mit bel. } \psi. \\ \text{da } \underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\psi = 0 \end{array}\right.$

läßt sich

$\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot}\, \underline{A}(\underline{r})$ schreiben.

Beweis: $\underset{\sim}{\nabla}_r \times \underset{\sim}{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \; \underbrace{\nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} \times \underline{j}(\underline{r}')$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \; \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \underline{B}$$

Folgendes ist äquivalent:

(i) $\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot}\, \underline{A}$

$\Updownarrow$

(ii) $\text{div}\, \underline{B} = 0$ $\iff$ Es gibt keine Quellen der magn. Induktion "magn. Ladungen".

Zusammenhang zwischen $\underline{B}$ und $\underline{j}$:

$$\text{rot}\, \underline{B} = \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A}$$
$$\text{grad}(\text{div} A) - \Delta A$$

$$(\nabla \cdot \underline{A}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \; \nabla_{\underline{r}} \left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \; \underline{j}(\underline{r}') \; \underbrace{\nabla_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\nabla_{\underline{r}'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \left[-\nabla_{\underline{r}'} \left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) + \frac{1}{|r-r'|} \underbrace{\nabla_{\underline{r}'} \underline{j}(r')}_{} \right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Gauß'scher Satz}} \qquad \underbrace{}_{-\frac{\partial}{\partial t}\rho} \quad \text{Kontinuitäts-gleichung}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\int_{S(r\to\infty)} d\underline{f}' \cdot \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{0 \text{ für hinreichend rasch abkling. } \underline{j}(r')} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\mu_0 \varepsilon_0 \phi(\underline{r},t)}$$

$$\nabla(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

$$\Delta A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r},t)$$

Also

$$\boxed{\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}}$$

Verschiebungsstromdichte

Für stationäre Strom und Ladungsverteilung

$$\boxed{\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underline{j}}$$

differentielle Form des Ampère-Gesetzes

(Ströme sind die Wirbel der magn. Induktion)

Integration über Fläche F :

Stokes

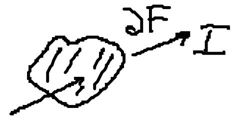
$$\int_F d\underline{f}\,\mathrm{rot}\,\underline{B} = \oint_{\partial F} d\underline{s}\,\underline{B}$$

$$= \mu_0 \underbrace{\int_F d\underline{f}\,\underline{j}(\underline{r})}_{I}$$

I Strom durch F

Integralform

$$\boxed{\int_{\partial F} d\underline{s}\,\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 I}$$



Zusammenfassung

Magnetostatik (stationäre Ströme)

Elektrostatik (statische Ladungsvert.)

$$\boxed{\mathrm{div}\,\underline{B} = 0 \quad \Updownarrow \quad \mathrm{rot}\,\underline{A} = \underline{B}}$$

(quellfrei)

(wirbelfrei)

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{E} = 0 \quad \Updownarrow \quad \underline{E} = -\nabla\phi}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j} \quad \Updownarrow \quad \int_{\partial F} d\underline{s}\,\underline{B} = \mu_0 I}$$

diff. Form

Integralform

Ampère

$$\boxed{\varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\underline{E} = \rho \quad \Updownarrow \quad \varepsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}\,\underline{E} = Q}$$

Gauß'sches Gesetz

Coulomb

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{\triangle \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})} \qquad\qquad \boxed{\triangle \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\underline{r})}$$

Poissongl.

gilt nur falls $\operatorname{div}\underline{A} = 0$
(Coulomb Eichung)
Umeichung $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla \psi(\underline{r})$

- Magnetostatik und Elektrostatik sind entkoppelt!