

6. Kommutierende Operatoren, gemeinsame Eigenfunktionen und zweite Messung

Diskussion störungsfrei / gestörte Messung zweier Observablen

d.h. betrachten 2 hermitesche Operatoren $\underline{A}, \underline{B}$, kennen eig. d. Eigenwertproblems

$\{\varphi_n^A(\vec{r})\}$ sei vollständige System v. Eigenfunktionen zu \underline{A} :

$$\underline{A} \varphi_n^A(\vec{r}) = a_n \varphi_n^A(\vec{r}), \quad \underline{B}: \text{andere Definition}$$

" $\{\varphi_n^A(\vec{r})\}$ heißt Basis von \underline{A} "

a) Ist $\{\varphi_n^A = \varphi_n^B = \varphi_n\}$ Basis von \underline{A} und \underline{B} , so $[\underline{A}, \underline{B}] = 0$

Beweis: $[\underline{A}, \underline{B}] \varphi_n = (\underline{A} \underline{B} - \underline{B} \underline{A}) \varphi_n$

annahme des Eigenwertproblems: $\underline{A} \varphi_n = a_n \varphi_n, \quad \underline{B} \varphi_n = b_n \varphi_n$

$$= (a_n b_n - b_n a_n) \varphi_n = 0 \varphi_n$$

→ weil Beziehung $\forall \varphi_n$ gilt: $[\underline{A}, \underline{B}] = 0$

b) Ist $[\underline{A}, \underline{B}] = 0$, so haben \underline{A} und \underline{B} ein gemeinsames

System von Eigenfunktionen $\{\varphi_n^A = \varphi_n^B = \varphi_n\}$.

Beweis: $[\underline{A}, \underline{B}] = 0 \rightarrow (\underline{A} \underline{B} - \underline{B} \underline{A}) \varphi_n^A = 0$

$$\underline{A}(\underline{B} \varphi_n^A) = \underline{B}(\underline{A} \varphi_n^A) \quad \text{mit} \quad \underline{A} \varphi_n^A = a_n \varphi_n^A \quad (*)$$

$$\underline{A}(\underline{B} \varphi_n^A) = a_n (\underline{B} \varphi_n^A) \quad (**)$$

es ist also $\underline{B} \varphi_n^A \sim \varphi_n^A$ wg. (*) (**)

mit Proportionalitätsfaktor b_u :

$$\underline{B} \varphi_u^A = b_u \varphi_u^A$$

$\rightarrow \underline{A}$ und \underline{B} haben identische Eigenfunktionen

c) Menge der Operatoren $\{A, B, \dots, M\}$ heißt vollständiges Satz von Operatoren für ein System wenn

i) kommutieren untereinander

ii) jeder aus Operator lässt sich als k -te darstellen

die gemeinsamen Eigenfunktionen dieser Operatoren können nummeriert werden:

$$\varphi_u \rightarrow \varphi(a_u, b_u, \dots, m_u)$$

d) Begriff der gleichzeitige störungsfreie / gestörte Messg. v. $\underline{A}, \underline{B}$,

\underline{A} und \underline{B} Messung diskret

- Start sei Wellenfunktion $\varphi = \sum_i c_i \varphi_i$, φ_i aus: $\underline{A} \varphi_i^A = a_i \varphi_i^A$, $\underline{B} \varphi_i^B = b_i \varphi_i^B$

- zunächst \underline{A} messen: man erhält Messwert a_u mit Wahrscheinlichkeit $|c_u|^2$
und $\varphi \rightarrow \varphi_u^A$; fehlt \underline{B} messen

(i) wenn $[\underline{A}, \underline{B}] = 0$: $\varphi_u^A = \varphi_u^B$

$\varphi \xrightarrow{A} \varphi_u^A, a_u \xrightarrow{B} \varphi_u^B, b_u$ d.h. Wellenfkt bleibt erhalten nach \underline{B} -Messg.

störungsfreie Messung von $\underline{A}, \underline{B}$.

(ii) wenn $[\underline{A}, \underline{B}] \neq 0$

$$\psi \xrightarrow{A} \varphi_u^A, a_u \quad \xrightarrow{B} \varphi_m^B, b_m \quad \text{mit } \varphi_u^A \neq \varphi_u^B$$

$$\varphi_u^A = \sum_j c_j \varphi_j^B$$

d.h. Wellenfkt. bleibt nicht erhalten
nach B-Messung

mit störungsfreie Messg. v. $\underline{A}, \underline{B}$

Nur wenn $[\underline{A}, \underline{B}] = 0$, so stören sich die Messungen nicht gegenseitig.

In Experiment beobachtet dies eine Streuung der Messwerte die nicht
aufhört werden kann \rightarrow Unschärferelation

7. Allgemeine Unschärferelation bei Messung zweier Observabler

bisher: Wellenpaket $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ $\hat{=}$ keine scharfen Messwerte

Suche allgemein Beziehung f. $\underline{A}, \underline{B}$

a) Unschärferelation f. hermiteschen Operatoren

$\underline{A}_1, \underline{A}_2$ sind 2 hermitesche Operatoren, Schwankungen sind $\Delta A_1, \Delta A_2$,

so gilt:
$$\Delta A_1 \cdot \Delta A_2 \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\underline{A}_1, \underline{A}_2] \rangle \right|$$

Bsp:
$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{über } [x, p_x] = i\hbar$$

Relation ist allgemeingültig und Beweis über Schwarzsche Ungleichg.

f. Skalarprodukt von Operatorabweichung $\Delta \underline{A}_i = \underline{A}_i - \langle A_i \rangle$, $\Delta A_i = \sqrt{\langle \Delta A_i^2 \rangle}$

Wenn Kommutator $\neq 0$ ist, so störungsfreie Messg. nicht möglich.

b) Energie-Zeit Unschärfe

Zeit trägt kein Operatorcharakter, Energie schon

$$\text{Vgl.: } \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \rightarrow [\Delta E \Delta t] \hat{=} [\frac{\hbar}{2}]$$

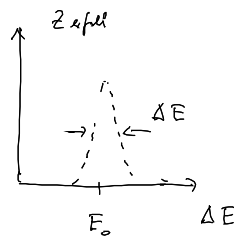
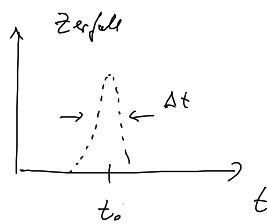
Energie ist nicht sofort festgelegt bei Messung

In QM muß z. U. strikte Energieerhaltung aufgegeben werden

(später: Fermis Goldene Regel gilt nur f. lange Zeiten)

↓ typische Weise $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$ (Absicht einzeln f. jede Exp.)

Bsp: α -Zerfall, spontane Emission v. Licht



$$\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \hbar$$

8 Bisherige Axiome der QM

- 1) Zustände $\psi(\vec{r}, t)$ im System sind Elemente d. Hilbertraums.
- 2) Jedes Observables wird ein linear selbstadjungierter Operator im Raum der Zustände zugeordnet
- 3) Mittelwerte sind bestimmt über $\langle \underline{A} \rangle = (\psi, \underline{A} \psi)$
- 4) $\psi(\vec{r}, t)$ ist bestimmt über Schrödingergleichung $i\hbar \partial_t \psi = \underline{H} \psi$
- 5) Theorie d. Messg. über Zerlegung in vollständige Funktionssysteme.

9. Ehrenfest'sches Theorem und klassischer Grenzfall

Wie ergibt sich die Newton Gleichung?

a) Theorie der Mittelwerte (später: $\vec{r}, \vec{p} \hat{=} \underline{A}$)

$$\langle \underline{A} \rangle = \int d^3r \psi^*(\vec{r}, t) \underline{A} \psi(\vec{r}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \underline{A} \rangle = \int d^3r \left(\dot{\psi}^* \underline{A} \psi + \psi^* \underline{A} \dot{\psi} + \psi^* \underline{A} \dot{\psi} \right)$$

unter der Schrödingergleichg. $i\hbar \dot{\psi} = \underline{H} \psi$, $-i\hbar \dot{\psi}^* = \underline{H} \psi^*$

$$= \int d^3r \left(\underbrace{\left(\frac{i}{\hbar} \underline{H} \psi^* \right)}_{\underline{H} = \underline{H}^*} \underline{A} \psi + \psi^* \underline{A} \left(\frac{i}{\hbar} \underline{H} \psi \right) + \psi^* \underline{A} \left(-\frac{i}{\hbar} \underline{H} \psi \right) \right)$$

$$= \underbrace{\langle \partial_t \underline{A} \rangle}_* + \frac{i}{\hbar} \int d^3r \psi^* \underbrace{\left(\underline{H} \underline{A} - \underline{A} \underline{H} \right)}_{[\underline{H}, \underline{A}]} \psi$$

Bewegungsgleichung f. Mittelwert $\langle \underline{A} \rangle$:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \langle \underline{A} \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \langle [\underline{H}, \underline{A}] \rangle} \quad \text{Ehrenfesttheorem}$$

b) Spezialisierung auf Ort und Impuls

i) $\underline{A} \hat{=} \underline{\vec{r}}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \underline{\vec{r}} \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \underline{\vec{r}} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \langle [\underline{H}, \underline{\vec{r}}] \rangle, \quad \text{Newtons Grenzfalle:} \\ &= 0 + \frac{i}{\hbar} \langle [\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}), \underline{\vec{r}}] \rangle \quad \underline{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$[\underline{V}(\vec{r}), \underline{\vec{r}}] = 0, \quad [\frac{\vec{p}^2}{2m}, \underline{\vec{r}}] = -2i\hbar \underline{\vec{p}} \quad (\text{ÜA, Tutorium})$$

$$\Downarrow \frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle = \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \right\rangle \rightarrow m \frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle = \langle \vec{p} \rangle$$

$\hat{=}$ Impulsdefinition und Newton für gem. Mittelwerte

ii) $\underline{A} \hat{=} \vec{p}$

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, \vec{p}] \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}), \vec{p} \right] \rangle$$

$$[\vec{p}^2, \vec{p}] = 0, \quad [V(\vec{r}), \vec{p}] = \frac{\hbar}{i} \vec{f}(\vec{r}), \quad \text{mit } \vec{f} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad (\text{üA})$$

$$\Downarrow \frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle = \langle \vec{f} \rangle \quad \text{Impulsdynamik, analog. Newtongesetz f. Mittelwerte}$$

Ehrenfest'sches Theorem:

Die Newtongleichungen gelten f. gem. Erwartungswerte

c) Achtung:

Problem liegt in Kraftdefinition: $\langle \vec{f} \rangle = - \int d^3r \psi^*(\vec{r}, t) \vec{\nabla} V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$

$$\neq \text{Newtonkraft } -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Wann wird Kraft zu Newtonkraft:

$$\langle \vec{f} \rangle \approx \vec{\nabla}_{\langle \vec{r} \rangle} V(\langle \vec{r} \rangle)$$

$\langle \vec{r} \rangle$: Bahnkurve, geht in bei geringer Abw. von Mittelwert $\langle \vec{r} \rangle$

$$\begin{aligned}
 \langle f(\vec{r}) \rangle &= \langle f(\langle \vec{r} \rangle + \underbrace{(\vec{r} - \langle \vec{r} \rangle)}_{\text{Abw. d. v. Bahnkurve } \delta \vec{r}}) \rangle \\
 &= \underbrace{\langle \vec{f}(\langle \vec{r} \rangle) \rangle}_{\text{Newton}} + \underbrace{\left\langle \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{u!} (\delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\langle \vec{r} \rangle})^u \vec{f}(\langle \vec{r} \rangle) \right\rangle}_{\text{Quantkorrektur } \delta \vec{r} \neq 0}
 \end{aligned}$$

Wann Quantkorrektur = 0?

- freies Teilchen $V=0$, $\vec{f}=0$

- harmonischer Oszillator: Quantkorrekt. $\rightarrow 0$ für $\vec{f} \sim \langle \vec{r} \rangle$