

4. Messprozess und Bedeutung von Eigenwert / Eigenfunktion

Eigenwertproblem eines hermiteschen Operators $\hat{A} \varphi_n = a_n \varphi_n$

als gelöst annehmen, \hat{A} einer Messgröße zuordnen,

Frage nach physikalischer Bedeutung von a_n, φ_n ?

4.1. Kurzkurs: charakteristische Funktion

- $w(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichte, z.B. Elektron an Ort x zu registrieren

- $w(x) dx$ Wahrscheinlichkeit, das Ereignis in Intervall $[x - \frac{dx}{2}, x + \frac{dx}{2}]$ anzuköfen

a) n -tes Moment der Verteilung

$$m_n \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n w(x) = \langle x^n \rangle \quad n \in \mathbb{N}$$

b) charakteristische Funktion $\hat{=}$ Fouriertrafo von $w(x)$

$$\begin{aligned} \chi(\tau) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ix\tau} w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx w(x) \sum_n \frac{1}{n!} (-ix\tau)^n \\ &= \sum_n m_n \frac{(-i\tau)^n}{n!} \end{aligned}$$

günstig in Situationen in denen man leichter m_n als $w(x)$ bestimmen kann:

$$w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{2\pi} e^{ix\tau} \chi(\tau)$$

c) Mittelwert einer Größe $F(x)$

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx w(x) F(x)$$

d) Verwendung in der Quantentheorie $w \rightarrow |\psi|^2$

$$\langle F(\vec{r}, \vec{p}) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \psi^*(\vec{r}, t) F(\vec{r}, \vec{p}) \psi(\vec{r}, t)$$

symmetrische Schreibweise um Impulswert zu beschreiben

4.2. Anwendung auf Quantentheorie

Messung ein Observablen, die über ein hermitescher linear Operator

$$\underline{A} \text{ definiert ist: } \underline{A} \varphi_n = a_n \varphi_n \quad (\text{Beispiel Kasten})$$

a) System befindet sich zum Zeitpunkt der Messung in Eigenzustand φ_n

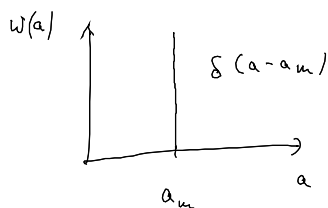
$$w_n = \langle \underline{A}^n \rangle = \int d^3r \varphi_n^*(\vec{r}) \underline{A}^n \varphi_n(\vec{r}) = (\varphi_n, \underline{A}^n \varphi_n) = (\varphi_n, a_n^n \varphi_n) = a_n^n$$

$\Rightarrow w_n = a_n^n$, gilt über $\chi(\tau)$, $w(a)$ berechnen

$$\Rightarrow \chi(\tau) = \sum_n a_n^n \frac{(-i\tau)^n}{n!} = e^{-i\tau a_n}$$

$$\Rightarrow w(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{2\pi} e^{ia\tau} e^{-i\tau a_n} = \delta(a - a_n)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte, Ereignis bei a vorzufinden



Integral über kleine Umgebung von a_n gibt die

Wahrscheinlichkeit $p(a_n)$, Messwert a_n zu messen

$$p(a_n) = \int_{a_n - \varepsilon}^{a_n + \varepsilon} da w(a) = \underline{\underline{1}}$$

In einem Eigenzustand φ_n misst man mit Sicherheit ($p(a_n) = 1$) den Messwert a_n : $\psi(\vec{r}, t)|_{t=\text{Messg.}} = \varphi_n(\vec{r})$

Mittelwert $\langle \underline{A} \rangle = \int da w(a) a = \int da \delta(a - a_n) a = a_n$

Streuung $\Delta A = (\langle \underline{A}^2 \rangle - \langle \underline{A} \rangle^2)^{1/2} = 0$

b) System befindet sich in beliebigen Zustand ψ zum Zeitpunkt der Messung da $\{\varphi_n\}$ vollständig ist, kann $\psi = \sum_n c_n \varphi_n$ geschrieben werden

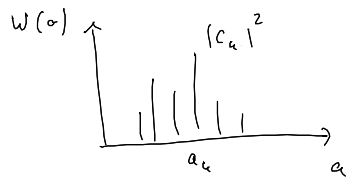
$$\begin{aligned} m_n = \langle \underline{A}^n \rangle &= (\psi, \underline{A}^n \psi) = \sum_{n, n'} (c_n \varphi_n, \underline{A}^n c_{n'} \varphi_{n'}) \\ &= \sum_{n, n'} c_n^* c_{n'} a_n^n (\varphi_n, \varphi_{n'}) = \sum_n |c_n|^2 a_n^n \end{aligned}$$

$$\Downarrow m_n = \sum_n |c_n|^2 a_n^n$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \chi(\tau) &= \sum_n \frac{(-i\tau)^n}{n!} \sum_n |c_n|^2 a_n^n = \sum_n |c_n|^2 \sum_n \frac{(-i\tau)^n}{n!} a_n^n \\ &= \sum_n |c_n|^2 e^{-i\tau a_n} \end{aligned}$$

$$\Downarrow w(a) = \sum_n |c_n|^2 \delta(a - a_n)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte



Wahrscheinlichkeit Messwert a_n zu messen:

$$\int_{a_n - \frac{\epsilon}{2}}^{a_n + \frac{\epsilon}{2}} da W(a) = \int_{a_n - \frac{\epsilon}{2}}^{a_n + \frac{\epsilon}{2}} da \sum_n |c_n|^2 \delta(a - a_n) = \sum_n |c_n|^2 \delta_{n, n} = |c_n|^2$$

Im Superpositions Zustand $\psi = \sum_n c_n \varphi_n$ ist die Wahrscheinlichkeit a_n zu messen gleich $|c_n|^2 = \left| \int d^3r \varphi_n^*(r) \psi(\vec{r}, t_{\text{Mess.}}) \right|^2$

Mittelwert: $\langle \underline{A} \rangle = \sum_n |c_n|^2 a_n$

Streuung: $\Delta A = \left(\sum_n |c_n|^2 a_n^2 - \left(\sum_n |c_n|^2 a_n \right)^2 \right)^{1/2} \neq 0$ i.a.

c) Folge f. des Messprozesses

- Observable (Messgröße in QT) wird durch lineare, hermitesche Operatoren \underline{A} beschrieben, Eigenwertproblem: $\underline{A} \varphi_n = a_n \varphi_n$
- Einmalige Messg. züht dann einen der Werte a_n an
- nach Messung mit Ergebnis a_n muß sich System in φ_n befinden (a)
(Messg. fixiert Zustand!)
- wiederholte Messungen an demselben System gibt wieder a_n mit 100% Wahrscheinlichkeit

- wenn System vor Messung in Superposition ist $\psi = \sum_u c_u \psi_u$,
 so ändert die Messung den Zustand $\psi \rightarrow \psi_u$, wenn a_u gemessen wird,
 die Wahrscheinlichkeit daß a_u anzeigt ist $|c_u|^2$

- Prozess $\psi \rightarrow \psi_u$ "Reduktion der Wellenfunktion" (Projektion auf Eigenzustand)
 durch die Wechselwirkung mit Messapparat:
 unkontrolliert und kann nur über Wahrscheinlichkeitsausgabe
 beschrieben werden.

- Messprozess a_u $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$ liefert $\{a_i, |c_i|^2\}$

Konsistenz mit Bornsche Interpretation:

$$\langle \underline{A} \rangle = \sum_i |c_i|^2 a_i = \sum_i c_i^* c_i a_i$$

$$= \sum_i \underbrace{\int d^3r \psi^*(\vec{r}, t) \varphi_i(\vec{r})}_{c_i^*} \underbrace{\int d^3r \varphi_i^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}', t)}_{c_i} a_i$$

$$= \int d^3r \psi^*(\vec{r}, t) \underline{A} \psi(\vec{r}, t) \quad \text{und } \varphi_i^* a_i = \underline{A} \varphi_i^* \quad |$$

$$\langle \underline{A} \rangle = \int d^3r \psi^*(\vec{r}, t) \underline{A} \psi(\vec{r}, t) \quad \text{und Born } \checkmark$$

Der gm. Erwartungswert entspricht Mittel über viele Experimente,
 das einzelne Experiment an $\sum_i c_i \varphi_i$ ist zufällig

5.) Berechnung der Koeffizienten $c_u(t)$ aus Schrödingergleichung

allgemeinster \underline{H} (bisher):

$$H = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V_0(\vec{r}, t) + W(\vec{r}, \vec{p}, t) = \underline{H}_0 + W(\vec{r}, \vec{p}, t)$$

Lösbar: $\underline{H}_0 \varphi_n = E_n \varphi_n$

Ansatz f. $\psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n(t) \varphi_n(\vec{r})$

in Schrödingergl. ist $\dot{\psi} = H \psi$ einsetzen, mit $\int d^3r \varphi_n^*(\vec{r})$ multiplizieren

ü A \rightarrow $i \hbar \dot{c}_n(t) = E_n c_n(t) + \sum_m c_m(t) W_{nm}(t)$

$$W_{nm}(t) = \int d^3r \varphi_n^*(\vec{r}) W(\vec{r}, \vec{p}, t) \varphi_m(\vec{r})$$

Beurteilung:

- a) Dgl.-System, linear, zur Bestimmung der $c_n(t)$ in $\psi = \sum_n c_n(t) \varphi_n(\vec{r})$
 und Anfangsbeding. ist vollständige Lösung gewonnen
- b) $W \rightarrow 0 \rightarrow \psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \varphi_n(\vec{r})$
 mit $c_n = \text{konstant}$ f. stationäre Problem $V_0(\vec{r})$

c) Störmatrix W bestimmt

- Energieverschiebungen $E_n \rightarrow E_n + W_{nn}$ $n = n$
- Kopplung zwischen c_n und c_m mit $n \neq m$ in W_{nm}
 führt zu Übergängen zwischen stationären Zuständen $n \leftrightarrow m$

d) Mittelwert einer Observablen \underline{O}

$$\langle \underline{O} \rangle = \int d^3r \sum_n c_n^*(t) \varphi_n^*(\vec{r}) \underline{O} \sum_m c_m(t) \varphi_m(\vec{r})$$

$$= \sum_{u,m} \underbrace{c_u^*(t) c_m(t)}_{P_{um}(t)} \int d^3r \underbrace{\varphi_u^*(\vec{r}) \underline{D} \varphi_m(\vec{r})}_{D_{um}}$$

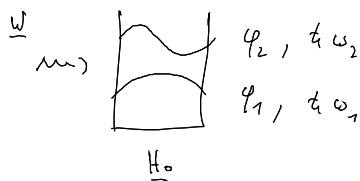
$$= \sum_{u,m} P_{um}(t) D_{um}$$

$P_{uu} = c_u^*(t) c_u(t)$ Wahrscheinlichkeit System in φ_u zu messen

$P_{um} = c_u^*(t) c_m(t)$ Übergangswahrscheinlichkeit $u \leftrightarrow m$ pro Zeiteinheit
zwischen φ_u und φ_m (Optische Übergänge)

D_{um} : WW-Stärke zwischen u und m (Optik: Auswahlregeln)

e) Quantenübergänge im Kasten (ÜA)



$$W = -q \vec{r} \cdot \vec{E}_0 \cos(\omega_0 t)$$

Wechselwirkung mit elektromagn. Wellen

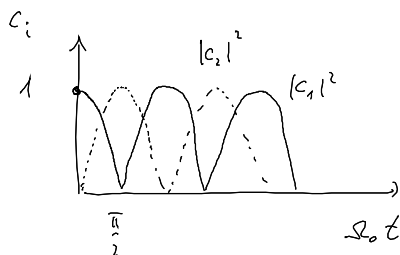
ω_0 Frequenz, q Ladung

$$\psi = c_1(t) \varphi_1(\vec{r}) + c_2(t) \varphi_2(\vec{r})$$

$$\text{mit } \omega_0 \approx \omega_2 - \omega_1$$

$$|c_1(t)|^2 = \cos^2(\Omega_0 t), \quad |c_2(t)|^2 = \sin^2(\Omega_0 t), \quad \Omega_0 = \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{d}_{12}}{\hbar}$$

Rabi-Frequenz



Rabi-Oszillationen im Zweiniveausystem