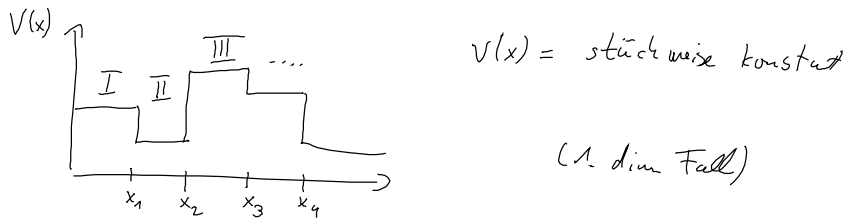


3 Teilchen am Potentialstufe

3.1 Eigenschaften der Wellenfunktion



Anwendung in Festkörper / Kernphysik,

z.B. periodische Anordnung von Ionen \rightarrow Elektronbewegung

Atomkern als ein Potentialtopf usw. \rightarrow Kern

Station Sgl:

$$H\psi = E\psi: \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

gesucht ψ, E .

Anforderung an ψ bei $x_1 = a$ \leftarrow Stelle der Stet.

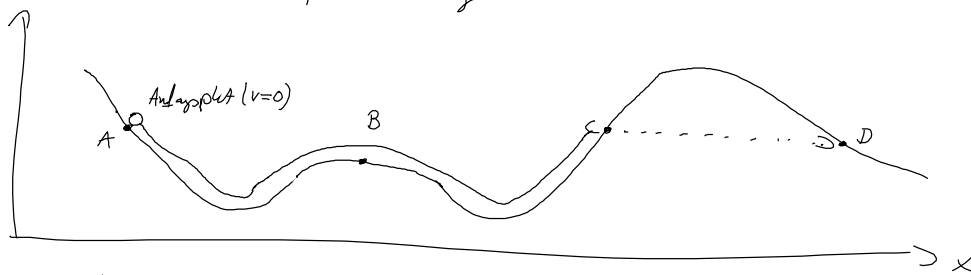
$\psi(x), \psi'(x)$ sind stetig

1) $\psi_I(a) = \psi_{II}(a)$ 2) $\psi'_I(a) = \psi'_{II}(a)$
 Stetigkeits bed. f. Wellenfkt. im stückweise konstanten Potential

Lsg der Schrödingergl. $\psi' = -\frac{2m}{\hbar} (E - V(x)) \psi(x)$ können durch
 Freiteildlösungen u. Stetigkeitsbed. bestimmt werden.

3.2 Wiederholung: klassisches Teilchen in Potentiallandschaft

Potential: $V(x)$, keine Reibung



$E_A > E_B$

$E_A = E_C$

$E_A = E_D$

$A \rightarrow B \rightarrow C \not\rightarrow D$

← "zurückrollen" klassisch verbotener Übergang.

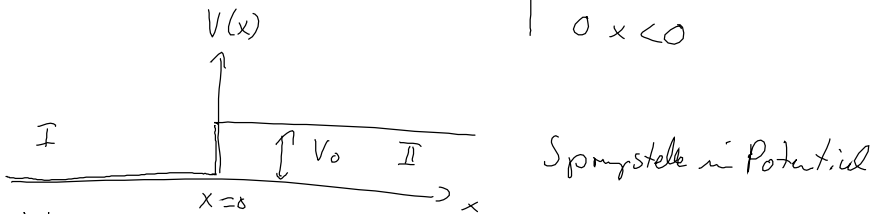
Quantenmechanik: \leftrightarrow 0 erlaubt (quantenmechan. Tunnel effekt)

diskutieren jetzt verschiedene Anwendungsbeispiele solcher Potentiale

3.3 Einzelne Potentialstufe

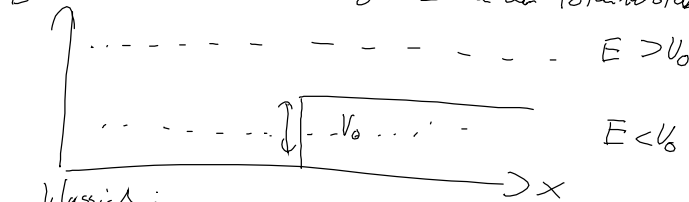
(einfachste Untersuchung, damit kann man das math. Verhalten gut verstehen)

$$V(x) = V_0 \Theta(x), \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Was würde man klassisch erwarten?

Teilchen mit Energie E an der Potentialstufe



klassisch:

- 1) $E < V_0 \rightarrow$ Teilchen kann nicht über die Stufe gelangen (Reflexion)
- 2) $E > V_0 \rightarrow$ Teilchen gelangt über die Stufe (Transmission)

Was sagt die QM zu diesen Teilchen? Lsg. stat Schrödinger.

Bereich I: $V=0 \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V\psi = E\psi \right)$

$$\psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi$$

Bereich II:

$$\psi'' = -\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \psi$$

setzt so nur für „stückweise konstant“ Potentiale

Lsg der beiden Bereiche müssen bei $x=0$ stetig sein:

$$\left(\psi_I(0) = \psi_{II}(0), \quad \psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \right)$$

a) Teilchen oberhalb der Potentialstufe

$$\boxed{E > V_0}$$

(klassisch passiert das Teilchen die Schwelle)

Bereich I: $\psi'' = -k^2 \psi, \quad k = \pm \sqrt{2mE}/\hbar$
 Bereich II: $\psi'' = -q^2 \psi, \quad q = \pm \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$

beide Gleichungen sind Schwingungsgl.:

I: $e^{\pm ikx}$ II: $e^{\pm iqx}$ (Freiteilchen)

(Dgl. 2. Ordng: 2 Lsg als Fundamentalsystem,
 Ges. Lsg. aus beide zusammensetzen)

Ansatz: $\psi_I = E_0 e^{ikx} + R e^{-ikx}$
 $\psi_{II} = E_1 e^{-iqx} + T e^{iqx}$

Linien kombinieren
mit unbek. Konstante
 E_0, E_1, R, T

Interpretation:



E_0 : wird $\frac{1}{\sqrt{2}}$ über Normung der Wellenfunktion

E_1 : Annahme, dass Teilchen von links einströmt ($E_1=0$ kein Teilchen von rechts)

R, T : bestimmen.

Stetigkeitsbed: ψ in $x=0$ für R und T :

(i) Stetigkeit der Wellenfkt:

(ii) Stetig der Ableitung!

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} + R = T}$$

$$\boxed{ik \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - R \right) = iqT}$$

insgesamt Lösung des Gleichungssystems:

$$\boxed{T = \frac{2k}{\sqrt{2}(q+k)}}$$

Transmissionskoeffizient als Fkt von q, k
bzw. V_0, E

weiterhin

$$\boxed{R = \frac{k-q}{\sqrt{2}(k+q)}}$$

Reflektionskoeffizient.

Damit ist $\psi(x)$ vollständig bestimmt!

$$R = \frac{\hat{R}}{\sqrt{2}} \quad T = \frac{\hat{T}}{\sqrt{2}}$$

- Wahrscheinlichkeitsverteilung

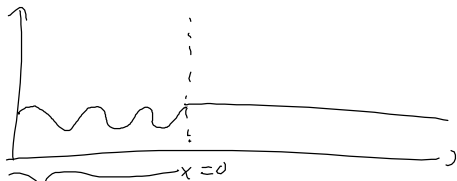
$$|\psi_I|^2 = \frac{1}{L} (1 + |R|^2 + 2 \hat{R}) \approx \frac{2k|x|}{L}$$

oszillierender Anteil

$$|\psi_{II}|^2 = \frac{|T|^2}{L} = \text{konstant}$$

Schreibg. aus Reflektierten und einfallender Wellen

$|R|^2$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit



- Stromdichten $\vec{j}(x)$

$$j = \frac{\hbar}{2m_i} (\psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi)$$

einsetzen von ψ_I und ψ_{II} ergibt:

$$\boxed{j_I = \frac{\hbar k}{m} (1 + |R|^2)}$$

Stromdichte in Π in I

$$\text{und } \boxed{j_{II} = \frac{\hbar q}{m} |T|^2}$$

Stromdichte in Bereich II

Reflexionskoeffizient

$$r = \frac{j_{ref}}{j_{ein}} = |R|^2 = \left| \frac{k-q}{k+q} \right|^2 \neq 0 \quad \text{f. } q \neq k$$

Transmissionskoeffizient

$$t = \frac{j_{trans}}{j_{ein}} = \frac{q}{k} |T|^2 = \frac{q}{k} \left(\frac{2k}{k+q} \right)^2 \neq 0$$

$$(t \cdot q = \sqrt{2m(E-V_0)}) \quad \text{und} \quad (t \cdot k = \sqrt{2mE}) \quad (E > V_0!)$$

Bemerkung: $(E > V_0)$

- Quantenmechanisch:

Teilchen wird an der Stufe mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit reflektiert (Interferenz)

klassisch:

$$E_I = V_0 + E_{II}$$

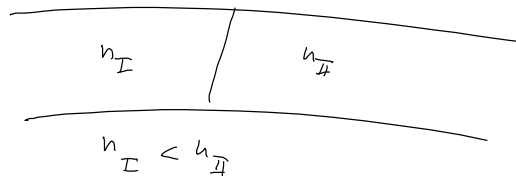
$$\frac{m}{2} v_I^2 \quad \quad \quad \frac{m}{2} v_{II}^2$$

$E > V_0$



Teilchen passiert die Potentialstufe und bewegt sich mit seiner Geschwindigkeit

- Die quantenrech. Reflexion ist ein typ. Wellenphänomen, analog zu Licht:



$$\frac{c}{n_I} > \frac{c}{n_{II}}$$

Verringerung der Lichtgeschwindigkeit bei Passieren einer Brechzahlstufe und Interferenzphänomene

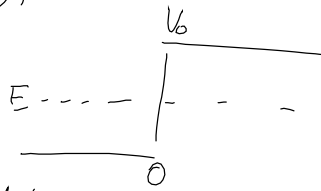
- klassischer Grenzfall: $E \gg U_0$

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar \approx q = \sqrt{2m(E-U_0)}/\hbar$$

$$R = \frac{k-q}{k+q} \rightarrow 0, \quad T = \frac{2k}{k+q} \rightarrow 1$$

Es existiert keine reflektierte Welle ($R=0$), d.h. der Grenzfall der klass. Mechanik.

b) Teilchen unterhalb der Potentialstufe



$E < U_0$

klassisch: „Abprallen des Teilchens“ u. zurückrollen.

Bereich I: $\psi^I = e^{-k^2 x}$, $k = \pm \sqrt{2mE}/\hbar$

Bereich II: $\psi^II = x^2 \psi$, $x = \pm \sqrt{2m(U_0-E)}/\hbar$
 $x = \pm i \sqrt{2m(E-U_0)}/\hbar = \pm iq$

Man kann die Lsg von Teil I ($E > U_0$) verwenden, wenn man $k \equiv \pm iq$ setzt ($q = \mp ik$)

Lösung:

$$\psi_I = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{ikx} + \tilde{R} e^{-ikx})$$

$$\psi_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{T} e^{iqx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{T} e^{-qx} \quad (- \text{Lsg ist nicht normierbar } e^{+qx})$$

$$\tilde{R} = \frac{k-iq}{k+iq}, \quad \tilde{T} = \frac{2k}{k+iq}$$

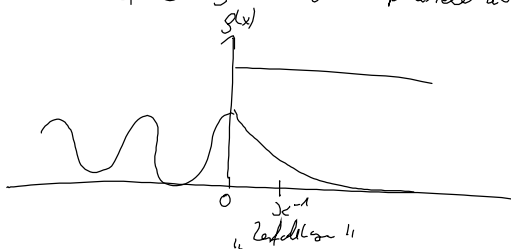
Bemerkung

- Wahrscheinlichkeitsdicht $|\psi(x)|^2$:

Quantenmech. erlaubt ein Eindringen des Teilchens in die Potentialbarriere, da

$$\psi_{II} = \frac{\tilde{T}}{\sqrt{2}} e^{-qx} \neq 0 \text{ bzw. } g(x) = \frac{|\tilde{T}|^2}{2} e^{-2qx} \neq 0 \text{ ist.}$$

ψ bzw. g klingen exponentiell ab, aber $\neq 0$



(einige Teilchen werden bei einer Exp. im Potentialwell zutreffen sein!)

- es gibt kein Fluss in die Stufe:

Teilchen nach rechts verschwindet

$$\hat{J}_I = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_I^* (\nabla \psi_I) - \psi_I (\nabla \psi_I^*) \right) = 0$$

↑ ist null $\sim 1 \cdot e^{-2kx}$

- Grenzfall unendlich hoher Potentialbarriere:

$V_0 \rightarrow \infty$; (siehe der Potentialtopf es hoch)

$$\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)} / \hbar \rightarrow \infty$$

$$\hat{T} = \frac{2k}{k + i\alpha} \rightarrow 0$$

$$\hat{R} = \frac{k - i\alpha}{k + i\alpha} \rightarrow -1$$

$$\psi_I(x) = \frac{A}{\sqrt{2}} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \rightarrow \psi_I(0) = 0$$

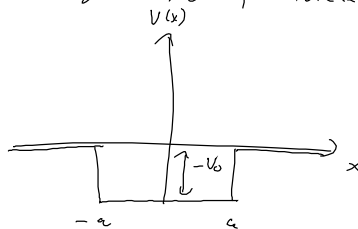
Die Stetigkeitsbed. an einer unendlich hohen Stufe.

3.4 Potentialtopf

Modellsystem f. kurzzeitig (Kampfsport, Stürzstelle Flk, große Moleküle)

Potentialverlauf:

$$V(x) = -V_0 \Theta(a - |x|) \quad \begin{matrix} 1: a > \lambda \\ 0: a < \lambda \end{matrix}$$



anschaulich:

gebundene (am Topf lokalisierte Zustände) und ungebundene Zustände

- gebunden werden Teilchen je höher die Masse m ist und je tiefer der Topf V_0 ist bzw. je breiter; Grenzfall: es tiefer Topf, alle gebunden

- gebunden: $-V_0 \leq E \leq 0$

, ungebunden $E > 0$

