

4. Impulswahrscheinlichkeitsdichte

bisher Mittelwerte über Ort: $\langle f(\vec{r}) \rangle = \int d^3r f(\vec{r}) |\psi(\vec{r}, t)|^2$

Frage: zweite Kenngröße der Mechanik ist Impuls \vec{p} ,
wie gestaltet sich Impulsmitteilung $\langle g(\vec{p}) \rangle = ?$

definieren Fouriertransformierte: $\hat{\psi}(\vec{k}, t) = \int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \psi(\vec{r}, t)$

mit $\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \hat{\psi}(\vec{p}, t) = \int d^3r e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} \psi(\vec{r}, t)$

Parsevaltheorem: $1 = \int d^3r |\psi(\vec{r}, t)|^2 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3k |\hat{\psi}(\vec{k}, t)|^2$
(1799, frz. Mathematiker) \uparrow ganzer Raum

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\hbar^3} \int d^3p |\hat{\psi}(\vec{p}, t)|^2 = 1$$

Impulswahrscheinlichkeitsdichte $f(\vec{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} |\hat{\psi}(\vec{p}, t)|^2$

Mittelwerte berechnen: $\langle A \rangle = \sum_n w_n A_n \leftarrow$ Realisierung
 \uparrow
Wahrscheinlichkeit

$$\underline{QH}: \quad \langle A(\vec{r}) \rangle = \int d^3r |\psi(\vec{r}, t)|^2 A(\vec{r}) \quad n \leftrightarrow \vec{r}$$

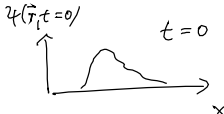
$$\langle B(\vec{p}) \rangle = \int d^3p \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} |\hat{\psi}(\vec{p}, t)|^2 B(\vec{p})$$

5. Schrödingergleichung im freien Raum: Wellenpakete

Schrödingergleichung: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t), \quad \Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

linear Dgl \rightarrow Lösung im Fourierraum

Ansatz: $\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\psi}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega(\vec{k})t} \hat{\psi}(\vec{k})$

Anfangsbeding.: vorgeben von $\psi(\vec{r}, t=0)$ 

Lösung:

a) Simultangültigkeit d. Ansatz: Dispersionsrelation

Einsetzen in Schrödingergleichung ergibt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega(\vec{k})t} (-i\omega(\vec{k}) \hat{\psi}(\vec{k}))$$

$$\Delta \psi \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \underbrace{\quad}_{=} (-|\vec{k}|^2 \hat{\psi}(\vec{k}))$$

Einsetzen in Schrödingergl:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega(\vec{k})t} \underbrace{\left(i\dot{t} - i\dot{t}\omega(\vec{k}) + \frac{\dot{t}^2}{2m} \cdot -|\vec{k}|^2 \right)}_{=0} \hat{\psi}(\vec{k}) = 0$$

$$\dot{t}\omega(\vec{k}) = \frac{\dot{t}^2}{2m} |\vec{k}|^2$$

$$\boxed{\omega(\vec{k}) = \frac{\dot{t}}{2m} |\vec{k}|^2} \quad \text{Dispersionsrelation der Schrödingergleichung}$$

wichtig $\omega \sim |\vec{k}|^2$, konträr zu Lichtwellen: $\omega_L \sim |\vec{k}|$

Zu erst ist sehr unterschiedliche Verhalten:

Lichtwelle:

Schrödingerswelle:

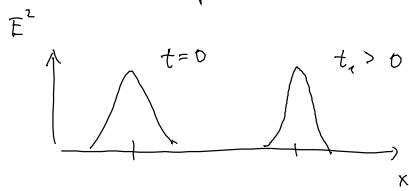
$$E(x, t) \sim \int dk f(k) e^{i(kx - \omega_L(k)t)}$$

$$\psi(x, t) \sim \int dk f(k) e^{i(kx - \omega_S(k)t)}$$

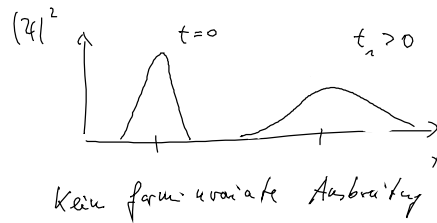
$$\text{mit } \omega_L = ck \sim \int dk f(k) e^{ik(x-ct)}$$

$$\text{mit } \omega_S = \frac{\dot{t}k^2}{2m} \sim \int dk f(k) e^{ik(x - \frac{\dot{t}k}{2m}t)}$$

$x-ct$: forminvariante Ausbreitung



Ähnlich formalistisch für einseitig Belegte



Kein forminvariante Ausbreitung

Integralformel f. Wellenpaketausbreitung (1D-dimensional)

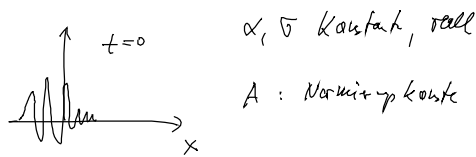
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n e^{-px^2 - qx} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{p}\right)^{1/2} \frac{\partial^n}{\partial q^n} e^{-\frac{q^2}{4p}}$$

Idee: Zunächst $\hat{\psi}(k)$ bestimmen, dann $\hat{\psi}(\vec{r}, t=0)$ Fouriertransformieren

Ausführung f. 1D-Wellenpaket mit $\psi(x, t=0) = A e^{-\left(\frac{1}{\sigma^2} + i\alpha\right)x^2} e^{ik_0 x}$

Phase modulierte
Gaußkurve

Aufexpansions k_0



b) Normierung von $\psi(x, 0)$ berechnen: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x, 0)|^2 \stackrel{!}{=} 1$

$$|A|^2 \int dx e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \stackrel{!}{=} 1 \rightarrow |A|^2 = \left(\frac{2}{\sigma^2 \pi}\right)^{1/2}$$

c) Bestimmung von $\hat{\psi}(k)$:

$$\hat{\psi}(k) = A \int dx e^{-x^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma^2} + i\alpha\right)}_{\beta}} e^{-i(k-k_0)x} = A \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\beta}}$$

Impulsverteilung ist um k_0 lokalisiert

d) Bestimmung von $\psi(x, t)$, $|\psi(x, t)|^2$:

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx - i\omega(k)t} \hat{\psi}(k) \quad \hat{\psi}(k) \text{ aus (c)} \\ &= A e^{-k_0^2/4\beta} \left| 1 + i \frac{2t\beta}{m} t \right|^{1/2} e^{-\frac{\beta}{1+i\frac{2t\beta}{m}t} \left(x - \frac{t k_0}{m} \right)^2} \end{aligned}$$

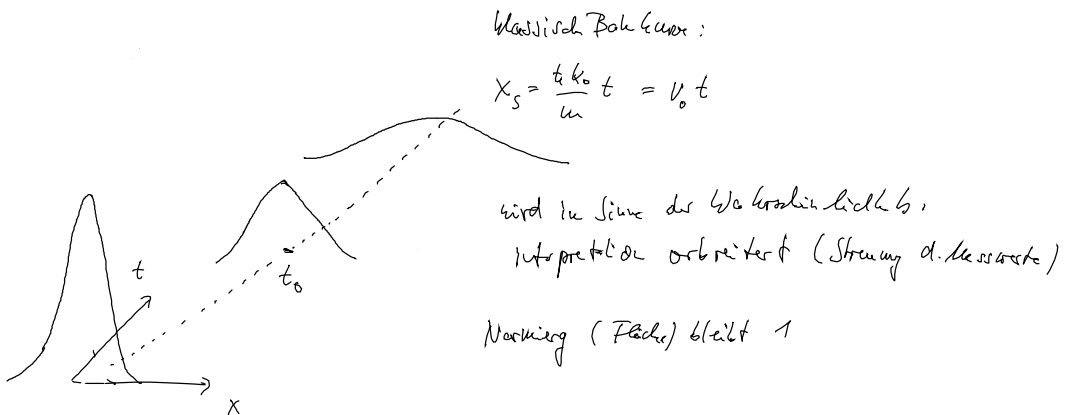
$$|\psi(x,t)|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{4\sigma^2 + \frac{4\hbar^2}{m^2} t^2}} \right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{2}{\sigma^2 + \frac{4\hbar^2}{m^2} t^2} \left(x - \frac{t k_0}{m} \right)^2}$$

$$\text{mit } \sigma^2(t) = \left(1 - \frac{2\hbar^2 \alpha}{m} t \right)^2 + \left(\frac{2\hbar^2}{m \sigma^2} t \right)^2$$

Bemerkung:

i) Wellpaket $t \neq 0$, wird ein fester Wert in x , aber mit Zeit
verschoben Maximum und der Breitenfaktor $\sigma(t)$ die Zeit mit variert

$$\alpha = 0: \quad (\text{für } \alpha \neq 0)$$



ii) typisch Zeit t_0 f. Verbreiterung wenn $\sigma^2 \approx 2$

$$1 = \frac{2\hbar^2}{m \sigma^2} t_0 \quad t_0 = \frac{m \sigma^2}{2\hbar^2}$$

Makroskop. Körper: $m = 0,1 \text{ g}, \sigma = 10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m} \rightarrow 10^{10} \text{ Jahre}$

atomar Körper $m = 10^{-30} \text{ kg}, \sigma = 10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m} \rightarrow 10^{-8} \text{ s}$

in Rahmen der Messgenauigkeit bei mech. sys. Körperen vernachlässigbar

e) Abw. von Ortsmittelwert

$$\text{Abw. um } x_s = \frac{v_0 t}{u}$$

$$\Delta x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{v^2 t^2}{4}$$

f) Abw. von Impulsmittelwert

Abw. um $k_0 \cdot t$

$$\Delta p^2 = \frac{h^2}{\sigma^2} (1 + \alpha^2 \sigma^4)$$

$$\text{Unschärfenprodukt } \Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{2} v(t) (1 + \alpha^2 \sigma^4)^{1/2}$$

Produkt v. Orts- und Impulsunsicherheiten fällt immer den berechneten Wert

$$1. \text{ für } \alpha = 0 \quad \Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{2} \left(1 + \left(\frac{2v}{u\sigma^2} t \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2} \quad \text{Heisenberg'sche Unschärfenrelation}}$$

$$2. \text{ für } \alpha \neq 0 \quad \text{ÜA fällt auch auf } \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2}$$

Beweis zu Unschärfen:

i) verkleinert man Ortsunsicherheit (Spalt kleiner $\hat{=}$ genau Ort festlegen)
so erhöht man die Impulsunsicherheit (Photostreife $\hat{=}$ weniger genau Impuls festlegen)

ii) Ort und Impuls ein Quanten können nicht gleichzeitig beliebig genau festgelegt werden
bzw. die Begriffe verlieren ihre Sinn

iii) Wellen-Teilchen Dualismus (Bohr):
beide Aspekte sind enthalten in Born'scher Postulate

$$p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad \rightarrow \quad dp = -\hbar \frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda \quad \text{Jenachts umschreiben}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \Delta x \cdot \frac{\hbar 2\pi \Delta \lambda}{\lambda^2} \geq \frac{\hbar}{2} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{\Delta x}{\lambda_B}}_{(1)} \cdot \underbrace{\frac{\Delta \lambda}{\lambda_B}}_{(2)} \geq \frac{1}{4\pi} = \text{Konst.}$$

① Maß für "Teilchenartigkeit" ② Maß für die "Wellenartigkeit"