

Bemerkungen / Nachtrag zur Supraleitung

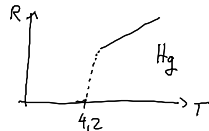
- Im allgemeinen ist Leitfähigkeit eines Festkörpers durch Streuprozesse der Elektronen gegeben (durch Impulsänderung wird Transport behindert)

man kann zeigen Widerstand $R(T) = R_0 + \alpha T^2 + b T^5$ T: Temperatur

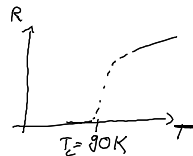
↑
Elektron-Elektron
Streuprozesse

←
Elektron-Phonon
Streuprozesse

- Exp. Beobachtung



plötzlich fast verschwindender Widerstand



$YBa_2Cu_3O_{7-x}$

- Erklärung durch attraktive e-e-WW von 2 Elektronen (reale Elektronen werden als Hintergrund betrachtet)

- Ausgangspunkt: Frölich-Hamiltonian (x_i, p_i)

+ Annahme nur zWW Elektronen mit $k' = -k$ also Gesamtimpuls $K = k + k' = 0$

+ Mean field Faktorisierung

+ Koordinaten transformation

Elektronen

$$\alpha_k = u_k a_{+k\uparrow} - v_k a_{-k\downarrow}$$

neue
Quantenzustände

$$\beta_k = u_k a_{-k\downarrow} + v_k a_{+k\uparrow}$$

↳ effektiver 1-Teilchen Hamiltonian

$$H_{eff} = \sum_k \sqrt{\epsilon_k^2 + |\Delta|^2} (\alpha_k^\dagger \alpha_k + \beta_k^\dagger \beta_k) + \sum_k (\epsilon_k - \sqrt{\epsilon_k^2 + |\Delta|^2}) + \frac{|\Delta|^2}{V}$$

- wobei u_k, v_k so gewählt, dass

α_k, β_k die Fermionensetzen

Vertauschungsrelationen erfüllen!

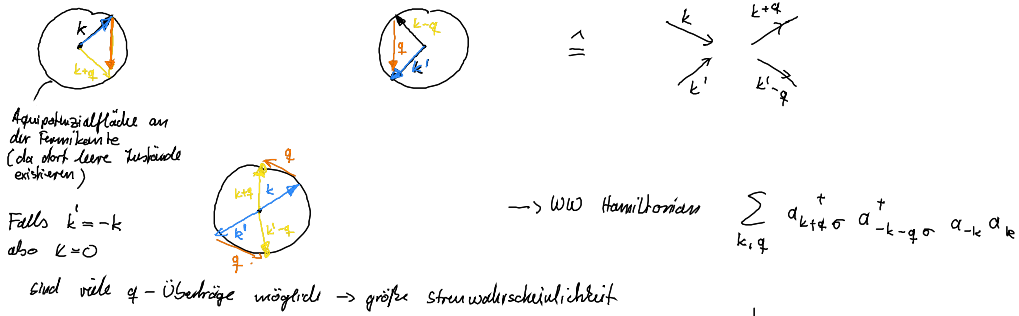
α_k, β_k sind Fermionen und wird die Cooper Paare

$$\Delta = V \sum_k \langle a_{-k\downarrow} a_{+k\uparrow} \rangle_{eff}$$

"Ordnungsparameter" muss selbstkonsistent bestimmt werden.

Ausgangszustände
↓ ↓

Streuung von 2 Elektronen (k, k')



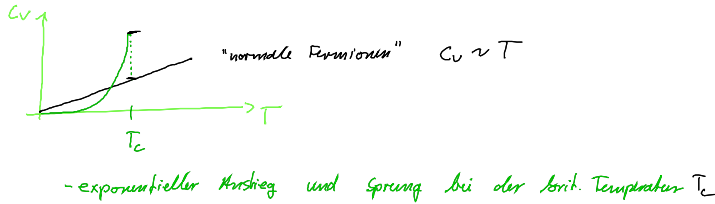
BCS Hamiltonian:

$$\sum_{k,k'} V_{kk'} a_{k'\uparrow}^\dagger a_{-k'\downarrow}^\dagger a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow}$$

Endzustand

• Cooper Pair wird gebildet aus beiden Anfangszuständen und ist ein bosonisches Teilchen.

\rightarrow Heff liefert Zustandssumme des Fermionenensembels und die Wärmekapazität



6.2. Wechselwirkung mit Licht

6.2.1. Dichtematrix (statistischer Operator) und Verteilungsfunktionen

Quantenmechanisches Gemisch

(unvollständige Info über Mikrozustand)
d.h. Wahrscheinlichkeitsverteilung P_i über mögliche Zustände $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}^{\text{mit}}$

Mittelwerte $\langle \hat{M} \rangle = \sum_i P_i \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_i \rangle$ mit $\sum_i P_i = 1$

$$= \sum_j \sum_i P_i \langle \psi_j | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_j \rangle$$

$$= \sum_j \langle \psi_j | \hat{\rho} \hat{M} | \psi_j \rangle$$

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{M})$$

statistischer Operator $\hat{\rho}$ Dichtematrix

$$\hat{\rho} := \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

wobei $\text{tr} \hat{\rho} = 1$
 $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ (gleich falls $\hat{\rho}$ einen reinen Zustand beschreibt)
 $\text{tr} \hat{\rho}^2 < 1$
 $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$

QM Gemisch = inkohärente Überlagerung von reinen Zuständen

Bsp.: 1 Teilchen im 2 Niveaus System : $\hat{\rho} = 2 \times 2$ Matrix

Liouville - von Neumann Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

(im Schrödingerbild),
Zustände sind zeitabhängig
ist $|\psi_i\rangle = \hat{A} |\psi_i\rangle$

Bem.: ① im Heisenbergbild steckt Dynamik in den Operatoren

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_H, \hat{A}_H] + \frac{\partial \hat{A}_H}{\partial t}$$

② Physikalisch ist oft vor allem Dynamik der Mittelwerte (Messwerte) wichtig
Ehrenfest Theorem

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \left\langle \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \quad \text{Bildunabhängig!}$$

Verteilungsfunktion der Elektronen und Löcher

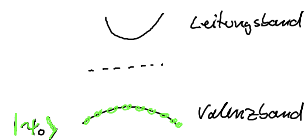
Betrachte $\langle a_k^\dagger a_k \rangle \equiv$ Mittelwert des Besetzungszahloperators im gemischten Zustand $\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$

mögliche Verteilung der Elektronen im Zustand k

$|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}^F$

↑
Vielteilchensystem

z.B. Halbleiter : Grundzustand bei $T=0$



$$\langle a_k^\dagger a_k \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} a_k^\dagger a_k) = \sum_i P_i \underbrace{\langle \psi_i | a_k^\dagger a_k | \psi_i \rangle}_{n_k^i}$$

Besetzung des 1-Teilchen Zustandes k wenn System im Vielteilchenzustand $|\psi_i\rangle$ ist.

$$n_k^i = 0, 1$$

$$= \sum_i P_i n_k^i$$

$$= f_e(\epsilon_k) \quad \text{Elektronen Verteilungsfunktion}$$

Maximum von $f_e(k)$:

$$n_k^i = 1 \rightarrow f_e(k) = \sum_i P_i = \underline{\underline{1}}$$

- $f_e(k)$ ist Wahrscheinlichkeit, ein Elektron bei k zu finden.

→ im reinen Zustand $f_e(k) = 0$ oder 1

im Gemisch $0 \leq f_e(k) \leq 1$

im thermodynamischen Gleichgewicht ist $f_e(k)$ die Fermi-Funktion

• Analog $\langle a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} \rangle = f_{\text{LH}}(\mathbf{k})$ Loch-Verteilungsfunktion
 ↑
 Erzeugung eines Defektelektrons (Loch)

• Beim Falls Spin als Quantenzahl betrachtet wird $f_{\text{e}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_s \langle a_{\mathbf{k}s}^+ a_{\mathbf{k}s} \rangle$

6.2.2. Semiklassische WW mit Licht

- WW mit opt. Lichtfeld verursacht Abweichungen der Elektronenverteilung
 beschreibbar durch Ham. Op. \hat{H}_{opt}
- Dipolkopplung an elektrisches Feld $\underline{E}(\mathbf{r}, t)$ (z.B. Laserpulse)

$$\hat{H}_{\text{opt}} = e \hat{\mathbf{r}} \cdot \underline{E}(\mathbf{r}, t) \quad \text{mit qm. el. Dipoloperator}$$

(halbklassisch: keine Feldquantisierung des Lichts)

Polarisierung des Halbleiters

qm. Dipoldichte

$$\hat{\underline{P}}(\mathbf{r}, t) = e \hat{\psi}^+(\mathbf{r}, t) \underline{r} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

$\hat{\psi}^+$, $\hat{\psi}$ sind Feldoperatoren des Elektronensystems

Def.: makroskopische Polarisation \underline{P} als Erwartungswert des Dipoloperators

$$\underline{P}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\underline{P}} \rangle = \langle e \hat{\psi}^+(\mathbf{r}, t) \underline{r} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n\mathbf{k}} a_{n\mathbf{k}} \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$$

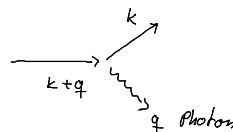
↑
 Blochfunktion
 $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$

$$\hat{\underline{P}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\substack{n\mathbf{k} \\ n'\mathbf{k}'}} a_{n\mathbf{k}}^+ a_{n'\mathbf{k}'} \psi_{n'\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \underline{r} \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$$

Fouriertrafo $\hat{\underline{P}}(\mathbf{q}, t) = \int d^3r \hat{\underline{P}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$

Def.: el. Dipolmatrixelement $\mu_{nn'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{V} \int d^3r u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \underline{r} u_{n'\mathbf{k}'}(\mathbf{r})$

$$\langle \hat{\underline{P}}(\mathbf{q}, t) \rangle = \underline{P}(\mathbf{q}, t) = - \sum_{nn'\mathbf{k}} \mu_{nn'}(\mathbf{k}) \langle a_{n\mathbf{k}}^+ a_{n'\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle$$



Näherung für opt. Grenzfall:

(1) $\hbar\omega \gg 0$ (Impuls der Photonen klein gegen Quasi-Impuls der Elektronen)

(2) Bandkantenoptik $\hbar\omega \approx E_G$
 ↑ ↑
 Photon Bandlücke

→ nur Interbandübergänge (LB \rightleftharpoons VB)

Elektron-Loch-Bild:

$$\underline{P}(0,t) = \underline{P}(t) = \sum_{\underline{k}} \mu \left(\langle d_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \rangle + \langle a_{\underline{k}}^{\dagger} d_{\underline{k}}^{\dagger} \rangle \right)$$

mikroskop.
Polarisation