

Wdh. Quantenzustände des Lichtes

- 1n) Fock Zustände - feste Fockzahl, unbekante Phase  $\langle E \rangle = 0$   
 $\langle E^2 \rangle = \langle \Delta E \rangle^2 = \epsilon^2(2n_0 + 1)$
- 1a) Glauber Zustände - rel. Schwankung verschwindet für große  $\alpha$   $\langle E \rangle \hat{=} \text{Amplitude des klass. E-Feldes}$
- $\hat{\rho}_{th}$  thermisches Gemisch -  $\langle E \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} E)$   
 $\langle E^2 \rangle = \epsilon^2(2\langle n \rangle + 1)$   
 $\langle n \rangle = \langle c^\dagger c \rangle_{th}$

6.4.3. Photonenkorrelationen

► Korrelationen 1. Ordnung des Feldes

$$G^{(1)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, t_1, t_2) = \langle E^{(-)}(\underline{r}_1, t_1) E^{(+)}(\underline{r}_2, t_2) \rangle \quad t_1 - t_2 = \tau$$

$$= G^{(1)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \tau) = \langle E^{(-)}(\underline{r}_1, t) E^{(+)}(\underline{r}_2, t + \tau) \rangle$$

Bem: Photendetektion geschieht über Absorption eines Photons  $\rightarrow$  nur Vermittler vom  $\vec{E}$  tragen

bei  $E^{(+)}(\underline{r}, t) = \sum_{\lambda} E_{\lambda} \vec{e}_{\lambda}$   
 $\sim e^{i\omega t}$

$\rightarrow$  Wahrscheinlichkeit ein Photon zu detektieren

$$\omega_1(\underline{r}, t) = \text{tr}(\hat{\rho} E^{(-)} E^{(+)})$$

$\uparrow$   
 $\vec{e}^+ \vec{e}^-$

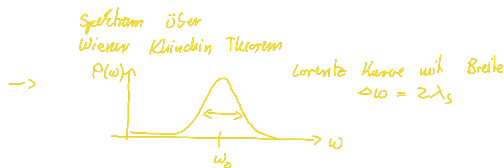
$\omega_1(\underline{r}, t) = G^{(1)}(\underline{r}, \underline{r}, 0)$

• thermisches Ensemble

$$G^{(1)}(\tau) = |E(\omega)|^2 e^{-\lambda_S \tau} e^{-i\omega_0 \tau}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{durch Varianz der Phase}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ebene Welle (kohärenter Zustand)}}$

• klassisch aus Breite der spektralen Leistungsdichte  $P(\omega)$  bestimmbar

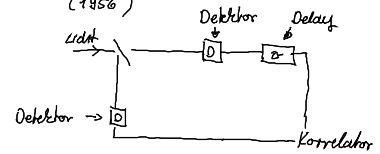


► Korrelationsfunktion 2. Ordnung des Feldes

$$G^{(2)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3, \underline{r}_4, t_1, t_2, t_3, t_4) = \langle E^{(-)}(\underline{r}_1, t_1) E^{(-)}(\underline{r}_2, t_2) E^{(+)}(\underline{r}_3, t_3) E^{(+)}(\underline{r}_4, t_4) \rangle$$

"Detektion von 2 Photonen"

Messung z.B. mit Hanbury Brown Twiss Setup (1956)



Bemerkung:  $G^{(2)}(\tau) \neq \langle I(t)I(t+\tau) \rangle$

$$\langle I \rangle = \langle E^{(-)} E^{(+)} \rangle$$

Operatoren vertauschen nicht!

nur im klass. Grenzfall vieler Photonen

normierte Korrelationsfunktion mit  $r_1 = r_2$  & einmodigem Feld

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{c}^\dagger(t) \hat{c}^\dagger(t+\tau) \hat{c}(t) \hat{c}(t+\tau) \rangle}{\langle c^\dagger c \rangle^2}$$

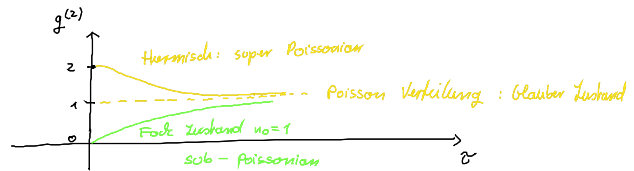
$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle c^\dagger(t) c^\dagger(t+\tau) c(t) c(t+\tau) \rangle}{\langle c^\dagger c \rangle^2}$$

Bedeutung von  $g^{(2)}(\tau)$ : kann zur Bestimmung der Photonstatistik, d.h. Quantenzustand des Lichtes  $g^{(2)}$  ist Wahrscheinlichkeit 2 Photonen mit Zeitdifferenz  $\tau$  zu detektieren

$$g^{(2)}(0)^{\text{Herm}} = 2 \quad \text{"bunched"}$$

$$g^{(2)}(0)^{\text{koh.}} = 1$$

$$g^{(2)}(0)^{\text{Fock}} = 1 - \frac{1}{n_0} \quad \text{"anti-bunched"}$$



#### 6.4.4. Elektronen in WD mit quantisiertem Lichtfeld

für klass. Feld hatten wir

$$\hat{H}_{\text{opt}} = \frac{1}{V} \sum_{\substack{\mathbf{k}, \mathbf{q} \\ \mu, \mu'}} \mathbf{E}(\mathbf{q}, t) \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mu_{\mu\mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$$

$\uparrow$  Erzeuger eines Elektrons im Festkörper       $\uparrow$  statisches Dipolmoment

mit quantisiertem Feldoperator:

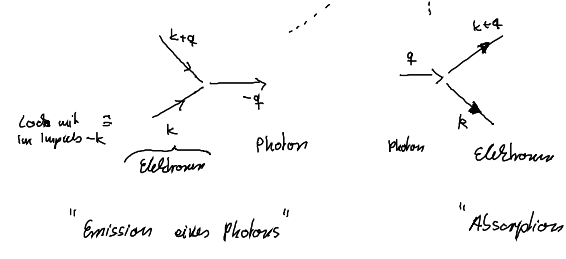
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{q}, t) = \sum_{\mathbf{q}} i\omega_{\mathbf{q}} \tilde{A}^{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \left[ \hat{c}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} - \hat{c}_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \right]$$

$$E(\mathbf{q}, \epsilon) \sim (\hat{c}_{\mathbf{q}} + \hat{c}_{-\mathbf{q}}^{\dagger})$$

↑  
Photon mit Frequenz  $\omega_{\lambda}$  entspricht  $\hbar\omega_{\lambda} = \frac{c}{\omega_{\lambda}}$

$$\hat{H}_{\text{opt}} = \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{n}'} g_{\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{n}'} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}, \mathbf{n}} (\hat{c}_{\mathbf{q}} + \hat{c}_{-\mathbf{q}}^{\dagger})$$

Kopplungskonstante



$a^{\dagger}$  : Fermion - Erzeuger  
 $c^{\dagger}$  : Boson - Erzeuger

d.h. Es liegt eine lineare Kopplung beider (vertauschender) Operatoren. Struktur ist identisch mit Elektron-Photon WW

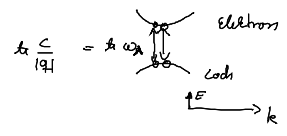
Folgerung:

① Das Exziton-Polariton

- Bei Halbleiter nahe der Bandkante wird durch  $\hat{H}_{\text{opt}}$  ein Elektron-Loch Paar erzeugt
- Formal kann ich den Exziton Erzeuger definieren

$$B_{\mathbf{q}}^{\dagger} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{n}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}, \mathbf{n}}$$

↑                      ↑  
LB                      VB



$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{opt}}$$

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{q}} (E_{\mathbf{q}} B_{\mathbf{q}}^{\dagger} B_{\mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}^{\dagger} c_{\mathbf{q}} + \hbar g_{\mathbf{q}} (\hat{c}_{\mathbf{q}} B_{\mathbf{q}}^{\dagger} + \hat{c}_{-\mathbf{q}}^{\dagger} B_{\mathbf{q}}))$$

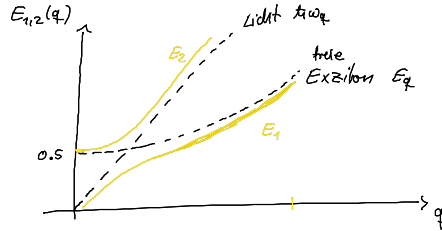
↓ diese k-Abhängigkeit der Kopplungskonstante

↑  
 $E_{\mathbf{q}}$  : Eigenenergie des Exzitons  
 $E_{\mathbf{q}} = \Delta - E_B + \frac{\hbar^2 q^2}{2(m_e + m_h)}$   
 ↑                      ↙ Exziton Bindungsenergie  
 Bandkanten diff.

• lässt sich leicht diagonalisieren durch neue Quasiteilchen mit Eigenenergie

$$E_{q,\pm}(q) = \frac{E_q + \hbar\omega_q}{2} \pm \sqrt{(\hbar\omega_q - E_q)^2 + 4g_q^2}$$

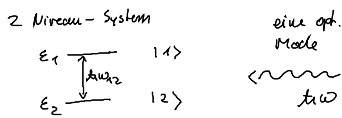
Exciton-Polariton



[ vgl. Phonon-Polariton aus Mott und Phononen (3.7.) und Übung 5 ]

## ② Jaynes Cummings Hamiltonian

aus dem allgemeinen Hamiltonian  $\otimes$  kann im einfachsten Fall von: einer Mode  $\hat{c}^\dagger$  zwei elektron. Zuständen  $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger$



$$\hat{H}_{JC} = \underbrace{E_1 a_1^\dagger a_1 + E_2 a_2^\dagger a_2 + \hbar\omega c^\dagger c}_{\hat{H}_0} + g(c + c^\dagger) a_1^\dagger a_2 + g^*(c + c^\dagger) a_2^\dagger a_1$$

umschreiben auf Eigenzustände des Atoms mit Spin-Matrizen

$$= \frac{\hbar\omega_{12}}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{E_1 + E_2}{2} \mathbb{1} + \hbar\omega c^\dagger c + g(\hat{c} + \hat{c}^\dagger) \hat{\sigma}_- + g^*(\hat{c} + \hat{c}^\dagger) \hat{\sigma}_+$$

mit  $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$

Hebeoperator:  $\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |1\rangle\langle 2|$

Vernichteoperator:  $\hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |2\rangle\langle 1|$

$\hat{H}_{JC}$  enthält

$$g\hat{\sigma}_+ \hat{c} + \hat{\sigma}_+ \hat{c}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{c} + \hat{\sigma}_- \hat{c}^\dagger$$

↓  
Photon vermittelt und Atom angeregt  
= Energieerhaltung

- nicht energieerhaltend  
- "haben nur kurz" Energie-Zeit Unschärfe

↓  
Photon erzeugt und Atom abgeregt

↳ werden vernachlässigt  
≡ (RWA) rotating wave approximation

Vorstellung im WW-Bild

$$\hat{V}_W = e^{i\frac{\omega_0}{\hbar}t} \hat{H}_{opt} e^{-i\frac{\omega_0}{\hbar}t}$$

$$\hat{c}_W = e^{i\omega_0 t} \hat{c} \quad \hat{c}^\dagger_W = e^{-i\omega_0 t} \hat{c}^\dagger$$

$$= \hat{c} e^{-i\omega t}$$

$$\hat{\sigma}_W = e^{i\frac{\omega_0}{\hbar}t} \hat{\sigma}_+ e^{-i\frac{\omega_0}{\hbar}t}$$

$$= \hat{\sigma}_+ e^{i\omega_0 t}$$

$\Rightarrow \hat{\sigma}_+ \hat{c}^\dagger \sim e^{i(\omega_0 + \omega)t} \rightarrow$  sehr schnelle Oszillation

$$\hat{\sigma}_+ \hat{c} \sim e^{i(\omega_0 - \omega)t}$$

langsam falls  $\omega_0 \approx \omega$

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega \hat{c}^\dagger \hat{c} + \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{c} + \hat{c}^\dagger \hat{\sigma}_-)$$

Jaynes Cummings Hamiltonian  
(eine Mode, ein Atom)

• Problem ist exakt lösbar