3. Lineare Gleichungssysteme & Determinanten

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad (3.1)$$

$$A_{ij} x_j = b_j$$

- Beschränkung auf $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Spezialfälle:

(i) $n=2$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Linear unabhängig, um für bel. $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zu lösen

$$\longrightarrow \boxed{\det \underline{\underline{A}} = |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \quad (3.4)$$

... Determinante

$\longrightarrow$ eindeutige Lösung für bel. $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ nur falls $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$

(ii) $n=3$:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{13} \\ \vdots & & \\ A_{31} & \cdots & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\xrightarrow{\text{z.B.}} \det \underline{\underline{A}}\; x_i = c_i(b_k A_{lm})$$

Def.: Determinante von $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\det \underline{\underline{A}} := \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$

Spatprodukt der Zeilenvektoren

$$= \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$$

Spaltenvektor!

$$= \_\_ + \_\_ + \_\_ - \_\_ - \_\_ - \_\_ \qquad (3.6)$$

... Sarrusche Regel

also:

$$\boxed{\begin{aligned} \det \underline{\underline{A}} \neq 0 &\longrightarrow \text{Spalten-/Zeilenvekt. l.u.} \\ &\longrightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \text{ existiert} \\ &\xrightarrow{(3.5)} \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b} \text{ eindeutig} \\ &\qquad \underline{x} = 0 \text{ für } \underline{b} = \underline{0} \end{aligned}} \quad (3.7)$$

NB: Berechnung von $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$: Cramersche Regel $\rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}$

(iii) allgemeines n: (3.7) gilt mit

$$\boxed{\begin{aligned} &\det \underline{\underline{A}} = \sum_{\text{alle } p} v(p)\, A_{i_1 1} A_{i_2 2} \cdots A_{i_n n} \\ &p = (i_1 i_2 \ldots i_n) \ \ldots \text{ Permutationen von } (1\,2 \ldots n) \\ &v(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } (1\,2\ldots n) \text{ und gerade Permutationen} \\ -1 & \text{" ungerade Permutationen} \end{cases} \end{aligned}} \quad (3.8)$$

... „Verallgemeinerung des Spatprodukts"

- Regeln für Determinanten: s. Kopie

4. Tensoren 2. Stufe

4.1 Einordnung

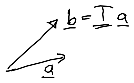
Tensor 0. Stufe = Skalare

" 1. Stufe = Vektor $\underline{a} \in V$, $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$ mit $\{\underline{e}_i\}$ ... ONB

" 2. Stufe

4.2 Definitionen & dyadische Produkt

- Def.: Tensoren $\underline{\underline{T}}$ 2. Stufe vermitteln eine lineare Abbildung des Vektorraums V in sich: (4.1)



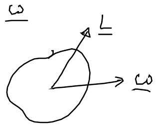
$\underline{\underline{T}}: \quad V \longrightarrow V$

$\underline{\underline{T}}: \quad \underline{a} \longmapsto \underline{b} := \underline{\underline{T}}\,\underline{a} \quad , \quad \underline{a}, \underline{b} \in V$

Linearität: $\underline{\underline{T}}(p\underline{a} + q\underline{b}) = p\,\underline{\underline{T}}\,\underline{a} + q\,\underline{\underline{T}}\,\underline{b}$

- Bspl.: starrer Körper mit Winkelgeschw. $\underline{\omega}$

$\longrightarrow$ Drehimpuls $\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$ (4.2)



$\underline{\underline{\Theta}}$ ... Trägheitstensor

vgl. $\underline{p} = m\underline{v}$

$\longrightarrow$ s. Videos!

• Bsp 2: Ausblick, Verallgemeinerung

QM: lineare Abbildung von Fkt (V mit Dimension = "∞")

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}:\ & V \longrightarrow V \\ & f(x) \longrightarrow g(x) = \hat{H} f(x) \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

Bezeichnung: $\hat{H}$ ... Operator (statt Tensor)

Bsp: $\hat{H} f(x) = x\, f(x)$

$\hat{H} f(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$

• Komponenten von $\underline{\underline{T}}$ bzgl Basis in V: $\longrightarrow$ Rechnen!

(1) allgemeine Basis in V (nicht ONB):

Tensoren: Bsp. ART

Operatoren: Operator auf V der Polynome

(2) hier: ONB $\{\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n\}$ (i.R.: $n = 3$)

↳ verwende Skalarprodukt!

$$\underline{e}_i \cdot \Big|\ \underline{b} = \underline{\underline{T}}\,\underline{a} \longrightarrow b_i = \underline{e}_i \cdot \underline{b} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{a}$$

$$\xrightarrow[\text{Linearität}]{\underline{a} = a_j \underline{e}_j} \quad b_i = \underbrace{(\underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j)}_{T_{ij}}\, a_j$$

$$\boxed{\begin{aligned} T_{ij} &:= \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j \\ b_i &:= T_{ij}\, a_j \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(4.4) \longleftarrow \text{Darstellung von } \underline{\underline{T}} \text{ in ONB} \\ &(4.5) \end{aligned}$$

... Wirkungsweise des Tensors in Komponenten

Schreibweise:

$$\underline{\underline{T}} \begin{cases} \text{Tensor 2. Stufe} \\ \text{Matrixdarstellung: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \end{cases}$$

• (4.5) legt nahe:

Satz: Tensoren 2. Stufe sind Elemente des Produktraumes $V \times V$ der die Basistensoren $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j,\ i,j = 1 \dots n\}$ besitzt.

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \qquad (4.6)$$

... Entwicklung von $\underline{\underline{T}}$ nach Basis!

vgl: $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$

Linearität:

$\underline{a} \otimes (\underline{b} + \underline{c})$

- Rechnen mit (4.6):

Def: Das Tensor-/dyadisches Produkt von $\underline{a}, \underline{b} \in V$

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \in V \times V$$

besitzt die Eigenschaften:

1. Bilinearität: $\underline{a} \otimes \underline{b} \overset{\text{Bsp.}}{=} (a_i \underline{e}_i) \otimes (b_j \underline{e}_j) = a_i b_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$

$\underline{a} \otimes \underline{b} + \underline{a} \otimes \underline{c}$

$\underline{a} \otimes p\underline{b} = p\, \underline{a} \otimes \underline{b}$

2. $(\underline{a} \otimes \underline{b})\, \underline{c} = \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{c})$ (4.7)