Mathematische Methoden der Physik

- Dozent: Holger Stark, EW 709, Holger.Stark@tu-berlin.de
- Modul des Bachelor-Studienganges;
  Beginn der Ausbildung in TP: KM, QM1, ED, Th/St.
- Vorlesung über e-Kreide!

1. Vorbemerkungen

- Physik (gr: φυσική = physike = „die Natürliche"
  beschreibt und „erklärt" Naturerscheinungen

Experimentalphysik
messen & reproduzieren

$\updownarrow$

Gesetzmäßigkeiten
der Natur

$\updownarrow$

Theoretische Physik
Sprache: Mathematik
physikal. Erscheinungen $\longleftrightarrow$ mathem. Größen
$\longrightarrow$ „formelhafte" Zusammenhänge

Bsp 1: $\underline{v}, \underline{F}, \underline{a}, m \longrightarrow \underline{F} = m\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$ ... Newtonsche Grundgesetz

Bsp 2: Einsteinsche Feldgleichungen

$$\underline{\underline{G}} = \kappa\, \underline{\underline{T}} \qquad (1.1)$$

(Verallgemeinerung von $\underline{a} = \frac{1}{m}\underline{F}$)

$\underline{\underline{G}}$: Einsteintensor, Krümmung, Metrik $\longleftrightarrow$ Geometrie des Raumes

κ: Einsteinsche Gravitationskonstante

$\underline{\underline{T}}$: Energie-Impuls-Tensor, Energie und Kräfte

- Vorlesung: Einführung in die Sprache der (Theoret.) Physik
  NB: Überschneidung mit Ex. physik, Mathematik für Physiker

• mathem. Größen:

(i) Skalare = Zahlen: Temperatur T, elektr. Ladung, träge Masse, komplexe Wellenfkt der QM (nicht relativistisch)

Achtung: $\boxed{\text{Pseudoskalare: ändert sein Vorzeichen unter Raumspiegelung}}$

wichtig in Elementarteilchen-Physik

Bsp: Spatprodukt (später)

Helizität einer Schraube

Rechts (+1) $\xrightarrow{\text{Spiegelung}}$ Links (−1)

(ii) Vektoren: Geschw., Kraft, elektr./magnet. Feld

Vierervektoren der RT (4D-Raum)

Spinoren in der relativist. QM!

also: Rechnen mit Vektoren $\rightarrow$ $\boxed{\text{Vektoralgebra}}$

(iii) Tensoren:

geometr. Deutung: $\underline{a} \longrightarrow \underline{\underline{I}}\,\underline{a}$

also: $\boxed{\text{Tensoralgebra}}$ $\longleftrightarrow$ Matrizen

• Skalare, Vektoren, Tensoren sind an Pkte. $\underline{r}$ im Raum angeheftet $\longrightarrow$ Felder: $T(\underline{r}), \underline{v}(\underline{r}) \ldots$

Raum: 3D, 4D (RT), 10/26D (Stringtheorie)

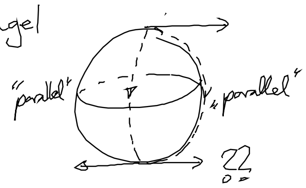
• Beziehung zwischen Raumpunkten?

(i) Paralleltransport eines Vektors

a) „trivial" im „flachen" Raum = unser Erfahrungsraum

b) nichttrivial in gekrümmten Räumen (ART)

Bsp: Kugel



(ii) räumliche Veränderung von physikal. Größe

Differenzieren:

Bsp: $\dfrac{d\underline{v}}{dx} \approx \dfrac{\underline{v}(x+\varepsilon) - \underline{v}(x)}{\varepsilon} \longrightarrow$ (i) wichtig

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Vektor- / Tensoranalysis}}$
(nur flache Räume)

• „formelhafte Zusammenhänge"
$\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{Differentialgleichungen}\\ = \text{Gesetze der Physik}\end{array}}$

Bsp.: $\underline{F} = m\underline{a} \longleftrightarrow m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} - \underline{F}(\underline{r}) = 0$

$\longrightarrow$ $\underline{r}(t)$ ... Raumkurve eines Pkt.teilchens

• Literatur: Vorlesung „selbergestrickt"
Vorlesungsmitschrieb (e-Kreide)

• Internet: www.itp.tu-berlin.de/stark $\longrightarrow$ Lehre $\longrightarrow$ MMP: SS19 $\longrightarrow$ Materialien
$\longrightarrow$ Zugang zu „Vorlesungsmanuskript" = e-Kreide
$\longrightarrow$ Übungen

• Zeit: Do. $8^{15} - 9^{45}$ (EW 201)

• Übungen: Übungsleiter Josua Grawitter (EW 701)
Arne Zantop (EW 701)

Tutoren: Isaac Tesfaye, Lasse Ermoneit
Jonal Friedrich, Phillip Knospe

Online-Anmeldung über Moses:

Beginn: 2. VLW

• „Appell": $\longrightarrow$ Vorlesungsbesuch
$\longrightarrow$ Nacharbeiten der Vorlesung

• Sprechstunde: Fr. $11^{30} - 12^{30}$

2. Vektoralgebra

• vom Konkreten zum Abstrakten!

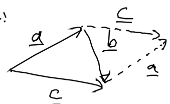
2.1 Vektoren für Physiker (in 3D)

• „Regeln":
(1) Vektor: Richtung & Länge (Bsp.: Kraft, Geschw.)

$\underline{a} = |\underline{a}|\,\hat{\underline{a}}$ — Einheitsvektor: Länge 1 (s.u.)

Betrag: $a = |\underline{a}|$

(2) Addition:

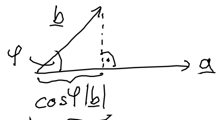


$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} = \underline{b} + \underline{a} \qquad (2.1)$$

(3) Multiplikation mit Skalar:

$$p\underline{a} = p\,|\underline{a}|\,\hat{\underline{a}} \qquad (2.2)$$

(4) Skalarprodukt: „Längen von, Winkel zwischen Vektoren"



Projektion von $\underline{b}$ auf die Richtung von $\underline{a}$

$$\boxed{\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos\varphi} \qquad (2.3)$$

(i) $\underline{a} = \underline{b}$: $\varphi = 0$: $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2$

(ii) $\underline{a} \perp \underline{b}$: $\varphi = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

… „senkrecht stehen"

Beachte: $\boxed{(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}}$ (2.4)

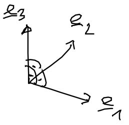
- (1)–(4): $\longrightarrow$ euklidischer Vektorraum (s. später)

  Beweis: Übung

2.1.1 Orthonormal Basis

- spezielles Set von Vektoren:

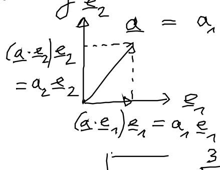
Def:
$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ... Einheitsvektor} \\ 0, & i \neq j \text{ ... orthogonal} \end{cases} \\ \quad\text{Kronecker-Symbol} \\ \text{3D: } i,j = 1,2,3 \end{array}}$$



Konvention: $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ … Rechtssystem [Rechte-Hand-Regel]

- Darstellung eines Vektors in Basis:

Bsp:



$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2$$

also:
$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a} &= \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{e}_i \quad \text{mit } a_k = \underline{a} \cdot \underline{e}_k \\ &= a_i \underline{e}_i \end{aligned}}$$

in Zukunft: Einsteinsche Summenkonvention
„über doppelt vorkommende Indizes wird summiert!"

Konsistenz: $a_k = \underline{a} \cdot \underline{e}_k = (a_i \underline{e}_i) \cdot \underline{e}_k = a_i \underbrace{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k}_{\delta_{ik}} = a_k$

- Skalarprodukt in Komponenten:

$$\boxed{\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_j \underbrace{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j}_{\delta_{ij}} = \underbrace{a_i b_i}_{\text{Standard-Skalarprodukt im } \mathbb{R}^3}} \quad (27)$$

- Konvention:

$$\underline{a} = \begin{cases} \text{Vektor im Raum} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \text{(Raum der 3dim. Spaltenvektoren)} \end{cases}$$