

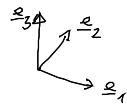
• \underline{c} ... axialer oder Pseudo vektor:

Raumspiegelung: $\left. \begin{matrix} \underline{a} \rightarrow -\underline{a} \\ \underline{b} \rightarrow -\underline{b} \end{matrix} \right\}$ aber: $\underline{c} \rightarrow \underline{c}$!

• Rechenregeln: $\left. \begin{matrix} (1) \underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \rightarrow \underline{a} \times \underline{a} = 0 \\ (2) \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} \\ (3) p \underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times p \underline{b} = p(\underline{a} \times \underline{b}), p \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} (2.8)$

• orthonormale Basis, Rechtssystem:

$\left. \begin{matrix} \underline{e}_i \times \underline{e}_i = 0 \\ \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1 \\ \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2 \end{matrix} \right\}$ zyklische Vertauschung



$\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \varepsilon_{ijk} \underline{e}_k$

$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon_{123} \\ 1 & \text{für alle gerade Permutationen} \\ -1 & \text{" " " ungerade " "} \\ 0 & \text{sonst, d.h. mindestens 2 Indizes gleich} \end{cases} (2.11)$

... voll ständig antisymmetrischer oder Levi-Civita-Tensor

Permutationen: Vertausche 2 Indizes:

$\varepsilon_{123} = 1 \xrightarrow{1x} \varepsilon_{213} = -1 \xrightarrow{1x} \varepsilon_{312} = 1$
 $\xrightarrow{2x}$

• $\underline{a} \times \underline{b}$ in Komponenten:

$\underline{a} \times \underline{b} \stackrel{\text{Btu. (2.6)}}{=} (a_i \underline{e}_i) \times (b_j \underline{e}_j) = a_i b_j \underbrace{\underline{e}_i \times \underline{e}_j}_{\varepsilon_{ijk} \underline{e}_k} = \varepsilon_{kij} a_i b_j \underline{e}_k$

$\rightarrow \underline{a} \times \underline{b} = \varepsilon_{kij} a_i b_j \underline{e}_k$ (2.12)
 $[\underline{a} \times \underline{b}]_k = \varepsilon_{kij} a_i b_j$

also: $[\underline{a} \times \underline{b}]_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$, $[\underline{a} \times \underline{b}]_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$, ...
von ε_{231}

• Minorkregel

$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \dots$ (2.13)

bestimme Determinante

• multilineare Rechenregeln:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (2.14)$$

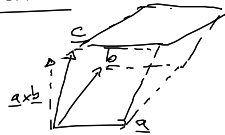
$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} (\underline{a} \cdot \underline{b}) \quad (2.15)$$

Beweis: Übung

• Fläche: Anwedung

2.1.3 Spatprodukt

• Def: $\underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$ (2.16)



$|\underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})| \triangleq$ Volumen des Spates $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$
[Grundfläche \times Höhe]

$\underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) > 0$, falls $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ Rechtssystem
 < 0 , " " " " Linkssystem

→ zyklische Eigenschaften:

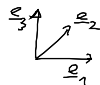
(2.17)

$$\underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = -\underline{c} \cdot (\underline{b} \times \underline{a}) \text{ etc.}$$

• Pseudoskalar: Vorzeichenwechsel bei Raumspiegelung

$$\left. \begin{array}{l} \underline{a} \rightarrow -\underline{a} \\ \underline{b} \rightarrow -\underline{b} \\ \underline{c} \rightarrow -\underline{c} \end{array} \right\} \underline{a} \times \underline{b} \rightarrow \underline{a} \times \underline{b} \left\} \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) \rightarrow -\underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

• Orthonormalbasis:



$$\underline{e}_i \cdot (\underline{e}_j \times \underline{e}_k) = \varepsilon_{ijk} \quad (2.18)$$

$$(2.10) \quad \underline{e}_i \cdot \underline{e}_m = \delta_{im}$$

$$\text{mit } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_m = \delta_{im} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ji} \\ \varepsilon_{ij} \end{array} \right.$$

• in Komponenten:

$$\underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = c_i a_j b_k \underbrace{\varepsilon_i \cdot (\underline{e}_j \times \underline{e}_k)}_{\varepsilon_{jkt}} = \varepsilon_{jkt} c_i a_j b_k$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

$$\stackrel{(2.17)}{=} \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$$

2.2 Einzelb. Matrizen (Details s.H.M)

• Elemente aus $\mathbb{R}^{n \times m}$:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & \dots & \dots & A_{nm} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Komponenten von \underline{A} : $A_{ij} = [\underline{A}]_{ij} \in \mathbb{R}$
↑
Zeile ↑
Spalte

• Bsp: $n=m=2$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

- Anwendung: (i) Drehmatrizen (\rightarrow Kap. 2.3)
- (ii) Darstellungstensoren 2. Stufe (\rightarrow Kap. 4)
- (iii) lineare Gleichungssysteme (\rightarrow Kap. 3)

• Rechenregeln:

$$\left. \begin{aligned} (i) [\underline{A} + \underline{B}]_{ij} &= A_{ij} + B_{ij} \\ (ii) [p\underline{A}]_{ij} &= p A_{ij}, \quad p \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} (2.21)$$

\rightarrow Vektorraum über \mathbb{R} bzgl. Addition (\rightarrow Kap. 2.4)

NB: Verallgemeinerung auf $\mathbb{C}^{n \times m}$ möglich [QM]

• Def: transponierte Matrizen \underline{A}^t von $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

in Komponente $[\underline{A}^t]_{ij} = A_{ji}$

in Matrixform:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \dots & A_{kk} & \dots & A_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \underline{A}^t = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{k1} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1k} & \dots & A_{kk} & \dots & A_{nk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- Spiegelung an Diagonale
- k Zeile $\rightarrow k$ Spalte

Bsp 1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Bsp 2: Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^{n \times m}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

• Def: $\text{Spur von } \underline{A} = \text{Sp } \underline{A} = A_{ii}, \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (2.23)

2.2.1 Matrixmultiplikation

• Spezialfälle:

(i) $n=m$: $\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned}
 & (1) \text{ symbolisch: } \underline{A} \underline{B} = \underline{C} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\
 & (2) \text{ in Komponenten: } A_{ij} B_{jk} = C_{ik} \\
 & (3) \text{ in Matrixform: } \begin{matrix} \underline{A} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{matrix} \underline{C} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

Bilde Skalarprodukt aus i -tem Zeilenvektor von \underline{A} mit k -tem Spaltenvektor von \underline{B}

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$

(ii) $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
 & \underline{A} \underline{b} = \underline{c} \\
 & A_{ij} b_j = c_i \\
 & \begin{matrix} \underline{A} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Anwendung: lineares Gleichungssystem: $\underline{b} = \underline{x}$... Variable

• allgemein $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{m \times r}$

$$\begin{aligned}
 & \underline{A} \underline{B} = \underline{C} \in \mathbb{R}^{n \times r} \\
 & A_{ij} B_{jk} = C_{ik}
 \end{aligned} \quad (2.26)$$

• im $\mathbb{R}^{n \times n}$:

(i) Einheitsmatrix: $[\underline{1}]_{ij} = \delta_{ij}$

(ii) inverse Matrix: $\underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{1}$

(iii) invertierbare $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bilden

Gruppe bzgl. Multiplikation

(A1) $\underline{A} \underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$... abgeschlossen

(A2) $\underline{A}(\underline{B} \underline{C}) = (\underline{A} \underline{B}) \underline{C}$... assoziativ

$$A_j (B_k C_{kl}) = (A_j B_k) C_{kl}$$

(A3) $\underline{A} \underline{1} = \underline{A}$... neutrales Element

$$A_j \delta_{jk} = A_{jk}$$

(A4) $\underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \underline{A} = \underline{1}$... inverses Element

$$A_j A_k^{-1} = \delta_{jk}$$

$$\text{Kern zu (A1): } (\underline{A} \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \underline{A}^{-1}$$

• Wichtig: i.a. $\underline{A} \underline{B} \neq \underline{B} \underline{A}$... nicht kommutativ

• weitere Regeln: (Satz 2.3)

$$(i) (\underline{A} \underline{B})^t = \underline{B}^t \underline{A}^t \quad (2.30)$$

$$(ii) \text{Sp}(\underline{A} \underline{B}) = \text{Sp}(\underline{B} \underline{A}) \quad (2.31)$$