

5. Euklidischer Raum (Fortsetzung)

5.1 Definitionen

Def: Ein Punkttraum A mit P, Q, R, \dots und ein Vektorraum V bilden einen affinen Raum, wenn gilt:

- (1) $P, Q \in A \mapsto$ Verbindungsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{PQ} \in V$
- (2) „Abtragen“ eines $\underline{r} \in V$ von P führt zu genau einem Q
- (3) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (Dreiecksregel)
- (4) $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \Rightarrow P=Q$

(5.1)

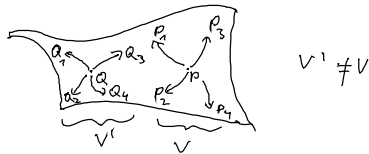
Def: Ist V ein euklidischer Vektorraum, so bildet mit A ein euklidischer Raum.

(5.2)

→ Abstandsmessung in A über Skalarprodukt in V :

$$d(P, Q) = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}$$

• gekrümmte Räume \neq affine Räume



Bsp. Kugeloberfläche:

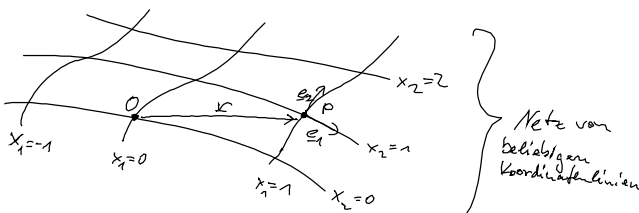


\overrightarrow{PQ} auf Großkreis
 Nullvektor $\underline{0} = \overrightarrow{NN}$ ist nicht eindeutig definiert
 → kein V

5.2 Koordinatensysteme

Motivation: Bahnkurven eines Massenpunktes } angeben
 Skalar-/Vektorfelder im Raum

• Ort von Punkt $P \leftrightarrow$ Koordinatenvektor (x_1, x_2, x_3)
 a) allgemeine (krümmende) Koordinaten



Ort von $P: (x_1, x_2, x_3)$ mit Ortsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$
 $\in A$ $\in V$

• natürliche (Koordinaten) Basis für den Vektorraum V_P , angeheftet an P :

normierte Tangentialvektoren e_i an x_i -Linien ($x_j = \text{const.}, j \neq i$)
 $|e_i| = 1$; i.a. $e_i \cdot e_j \neq 0$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ i.a. nicht ortsfest

- Berechnung? \rightarrow Einsubst: partielle Ableitung

(i) Skalarfeld: $f(\underline{r}) = f(x_1, x_2, x_3)$ Bsp T

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\substack{x_j = \text{const.} \\ j \neq i}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_i + \epsilon, \dots) - f(x_1, x_2, x_3)}{\epsilon} \quad (5.3)$$

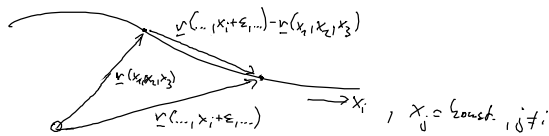
Schreibweise $\frac{\partial f(\underline{r})}{\partial x_i} = \partial_i f(\underline{r})$

(ii) Vektoren: $\frac{\partial \underline{v}(\underline{r})}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\underline{v}(\dots, x_i + \epsilon, \dots) - \underline{v}(x_1, x_2, x_3)}{\epsilon} \quad (5.4)$

(iii) Produktregel, Kettenregel, etc. gütlich

- Tangentialvektoren an x_i -Koordinatenlinie:

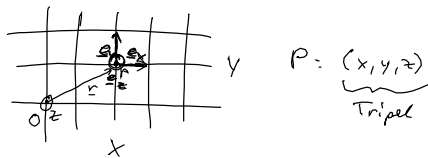
$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(\dots, x_i + \epsilon, \dots) - \underline{r}(x_1, x_2, x_3)}{\epsilon} \quad (5.5)$$



$$\Rightarrow e_i = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \right|^{-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \quad (5.6)$$

N.B.: In RT, $e_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}$ (nicht normiert)

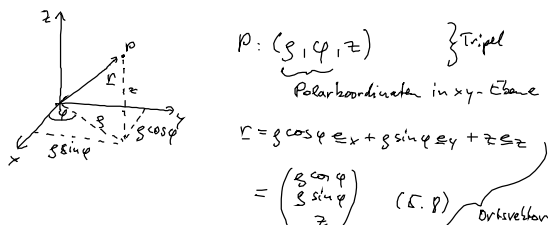
b) kartesische Koordinaten



$$\left. \begin{aligned} &\{e_1, e_2, e_3\} \text{ ortsfest} \\ &e_i \cdot e_j = \delta_{ij}; i, j = x, y, z \end{aligned} \right\} \underline{r} = x_i e_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.7)$$

Ortsvektor

c) Zylinderkoordinaten



$$P: (s, \varphi, z) \quad \left. \begin{aligned} &\text{Polarkoordinaten in } xy\text{-Ebene} \\ &\text{Tripel} \end{aligned} \right\}$$

$$\underline{r} = s \cos \varphi e_x + s \sin \varphi e_y + z e_z$$

$$= \begin{pmatrix} s \cos \varphi \\ s \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Ortsvektor

- Koordinatenbasis

$$e_s = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial s} \right|^{-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -s \sin \varphi \\ s \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \right| = \sqrt{s^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = s$$

$$\rightarrow \underline{e}_\varphi = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} -s \sin \varphi \\ s \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

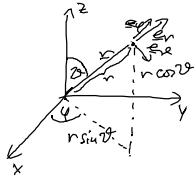
$$\underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = s, \varphi, z$$

NB:

$$\underline{r} = s \underline{e}_s + z \underline{e}_z \quad (5.10)$$

d) Kugelkoordinaten



Azimutalwinkel

$$P: (r, \vartheta, \varphi)$$

Polarwinkel

$$\underline{r} = r \sin \vartheta \cos \varphi \underline{e}_x + r \sin \vartheta \sin \varphi \underline{e}_y$$

$$+ r \cos \vartheta \underline{e}_z$$

$$= \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

• Koordinatenbasis: ortsabhängig

→ Übungen

$$\text{NB: } \underline{r} = r \underline{e}_r(\vartheta, \varphi) \quad (5.12)$$

5.3 Bahnkurven

• Teilbahnkurven im Raum:

$$(i) \text{ Zeit } t \mapsto \underbrace{x_1(t), x_2(t), x_3(t)}_{\text{Koordinatentripel}} \quad (5.13)$$

x_i : ... kart., zylindrisch, Kugel...

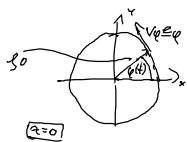
$$(ii) t \mapsto \underline{r}(t) \quad (5.14) \quad \text{Ort bei } t=0$$

$$\text{Bsp: (i) gerade Bahn: } \left. \begin{aligned} x(t) &= v_x t + x_0 \\ y(t) &= v_y t + y_0 \\ z(t) &= v_z t + z_0 \end{aligned} \right\} (5.15)$$

↑
konst. Geschwindigkeitsvektoren

$$\hat{=} \underline{r}(t) = \underline{v} t + \underline{r}_0 \quad (5.16)$$

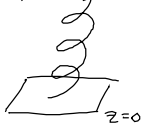
(ii) Kreisbahn:



$$\left. \begin{aligned} s(t) &= s_0 \\ \varphi(t) &= \frac{v_\varphi}{s_0} t = \omega t \\ z(t) &= 0 \end{aligned} \right\} (5.17)$$

↑
"Kreisfrequenz"
(Winkel pro Zeit)

(iii) Helix:

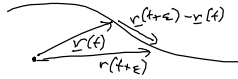


$$\left. \begin{aligned} s(t) &= s_0 \\ \varphi(t) &= \omega t \\ z(t) &= v_z t \end{aligned} \right\} (5.18)$$

- Teilchengeschwindigkeit:

$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(t+\varepsilon) - \underline{r}(t)}{\varepsilon} \quad (5.19)$$

(i) Tangente an Bahnkurve



$$(ii) v(t) = |\underline{v}(t)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\underline{r}(t+\varepsilon) - \underline{r}(t)|}{\varepsilon}$$

(iii) Einschub: Rechenregeln für Vektordifferentiation