

2.5 Lineare Unabhängigkeit, Entwicklungssatz

• Def: Vektoren a_1, \dots, a_n heißen linear unabhängig, falls $p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n = 0$ nur für $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$ erfüllt ist; andernfalls heißen sie linear abhängig. (2.46)

• Def: Die maximale Zahl n linear unabhängiger Vektoren im Vektorraum V heißt eine Basis in V . n heißt Dimension von V . (2.47)

• Entwicklungssatz: $\{e_1, \dots, e_n\}$... Basis in V
 \rightarrow eindeutige Entwicklung: $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ (2.47a)

- Bsp: (i) Vektoren für Physiker (\rightarrow Kap. 2.1.1)
 (ii) \mathbb{R}^n , $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$... $e_n = (0, \dots, 0, 1)$
 (iii) $\mathbb{R}^{n \times m}$, klar!
 (iv) Polynome: $e_0 = 1$, $e_1 = x$, $e_2 = x^2$, ...

2.6 Euklidischer Vektorraum

• Warum? „Länge von / Winkel zwischen Vektoren“
 Messen!

• Def: Ein euklidischer Vektorraum besteht aus einem reellen Vektorraum und einem Skalarprodukt = inneres Produkt $a \cdot b \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften: (2.48)

| | | | |
|------|--|------------------|------------------------|
| (A1) | $a \cdot b = b \cdot a$ | -- Symmetrie | } positive Definitheit |
| (A2) | $a \cdot a \geq 0$ | | |
| (A3) | $a \cdot a = 0 \iff a = 0$ | | |
| (A4) | $(p a) \cdot b = p (a \cdot b)$, $p \in \mathbb{R}$ | } ... Linearität | |
| (A5) | $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ | | |

Sprechweise: „ \cdot “ ist symmetrisch (A1)
 positiv-definit (A2/3)
 bilinear (A4/5)
 Abbildung: $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

- Messen!
 (i) Länge, Betrag, Norm von a : $a = |a| = \sqrt{a \cdot a}$ (2.49)
 (ii) a „steht senkrecht auf“ b , falls $a \cdot b = 0$ (2.50)

• Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ in V ist


Orthonormal-Basis, wenn

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \dots \text{normiert, Einheitsvektoren} \\ 0, & i \neq j \dots \text{orthogonal} \end{cases} \quad (2.51)$$

Kronecker-Symbol ($i, j = 1, \dots, n$)

Bem: Erzeugung von Orthonormal-Basis aus beliebiger Basis \rightarrow Gram-Schmidt oder Orthonormierungsverfahren \rightarrow Übungen

Bsp 1: Vektoren für Physiker (\rightarrow Kap. 2.1)

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi$$


Bsp 2: \mathbb{R}^n : $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ (2.52) (\rightarrow Kap. 2.1.1)

Bsp 3: $\mathbb{R}^{n \times m}$: $\underline{A} \cdot \underline{B} := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} B_{ij}$

Bsp 4: Polynome: $p_1(x), p_2(x)$

$$p_1 \cdot p_2 = \int_{-1}^1 p_1(x) p_2(x) dx \quad (2.54)$$

kontinuierlicher Index

2.7 Erweiterungen

Erweiterung: \mathbb{C} ... komplexe Zahlen

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ mit } i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \dots \text{Realteil} \\ y \in \mathbb{R} \dots \text{Imaginarteil} \end{array} \right\} \text{ von } z$$

$$z^* = x - iy \dots \text{konjugiert komplex zu } z$$

$$|z|^2 = z z^* = x^2 + y^2 \dots \text{Betrag von } z$$

(2.55)

für Vektorraum V über \mathbb{C} : Verallgemeinerung

Def:

Unitärer Vektorraum = komplexer V & (hermitesches) Skalarprodukt

$\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathbb{C}$ mit

$$(A1) \quad \underline{a} \cdot \underline{b} = (\underline{b} \cdot \underline{a})^* \dots \text{hermitesch} \quad (2.56)$$

$$(A2) \quad \underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0$$

$$(A3) \quad \underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} (A2) \\ (A3) \end{array} \right\} \text{wie in (2.48)}$$

$$(A4) \quad (p\underline{a}) \cdot \underline{b} = p^* (\underline{a} \cdot \underline{b}), p \in \mathbb{C}$$

$$(A5) \quad (\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c} \quad \left. \begin{array}{l} (A4) \\ (A5) \end{array} \right\} \text{semitilinear im 1. Argument wie in (2.48)}$$

insbesondere: $\underline{a} \cdot p\underline{b} = p (\underline{a} \cdot \underline{b}) \dots$ linear im 2. Argument (2.57)

$$\stackrel{(A1)}{=} (p\underline{b} \cdot \underline{a})^* = [p^* (\underline{b} \cdot \underline{a})]^* = p (\underline{b} \cdot \underline{a})^* \stackrel{(A1)}{=} p (\underline{a} \cdot \underline{b}) \quad \text{qed}$$

- Schreibweise: " \cdot " ist hermitesche (A1)
positive definite (A2/3)
sesquilineare (A1', A4', A5)
Abbildung: $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

• Schreibweisen:

$$\underbrace{a \cdot b}_{\text{Vektoren}} = \underbrace{(a, b)}_{\text{Funktionen, QM: Brackets}} = \langle a | b \rangle$$

• Bsp: \mathbb{C}^n : $a \cdot b = a_1^* b_1 + \dots + a_n^* b_n$ (2.58)

• Def: Prähilbertraum $P = V$ mit hermiteschem Skalarprodukt
 $P \rightarrow V$ über \mathbb{R} : euklidischer V (2.59)
 $\rightarrow V$ über \mathbb{C} : unitärer V

• Def: Hilbertraum $H =$ vollständiger Prähilbertraum P
 \hookrightarrow alle Grenzwerte von Cauchy-Folgen $\in P$

Bsp: rationale Zahlen \mathbb{Q} : nicht vollständig
 reelle " \mathbb{R} : vollständig

$$\left. \begin{array}{l} \pi \approx 3 \\ \approx 3,1 \\ \approx 3,14 \\ \vdots \end{array} \right\} \in \mathbb{Q}$$

aber: $\pi \notin \mathbb{Q}$!

• Anwendg in QM: Hilbertraum + gutartiger* Funktionen

[∞ -dim. Vektorraum,
 unitär: Norm, senkrecht stehen
 Hilbert: gutartig]

Bsp: Legen drei Polynom $\in P_L(x)$, $|x| \leq 1$
 $\{1, x, x^2, \dots\}$... Basis im Raum der Polynome

Ortho-
 nalisierung $\rightarrow P_L(x)$

NB: $|x| = |\cos \varphi| \leq 1 \rightarrow$ QM

3. Lineare Gleichungssysteme & Determinante (betr. s. HM)

Geg: Koeffizientenmatrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und Spaltenvektor $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

Ges: Spaltenvektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \quad (3.1)$$

$$A_{ij}x_j = b_i$$

$\underline{b} = \underline{0}$... homogenes Gln. system
 $\underline{b} \neq \underline{0}$... inhomogenes " " "

- Anwendung: (i) Eigenvektoren von Matrizen/Tensoren [s. Kap. 4]
 (ii) elektr. Netzwerke
- Fragen: (i) existiert Lösung \underline{x} ?
 (ii) ist \underline{x} eindeutig?

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ x_1, x_2 existiert nicht

Gud: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht vollständige Basis in \mathbb{R}^3

Beschränkung auf $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$! formale Lsg von 3.1:
 $\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$ (3.2)

Spezialfälle:
 (i) $n=2$:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

für bel. $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ nur lösbar, falls $\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}$ linear unabhängig (l.u.)

Def: Determinante von $\underline{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\det \underline{A} = |\underline{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \quad (3.4)$$

Wann: (3.3) $\xrightarrow{\text{o.B.}}$ $\det \underline{A} x_1 = b_1 A_{22} - b_2 A_{12}$
 $\det \underline{A} x_2 = b_2 A_{11} - b_1 A_{21}$

also: $\underline{b} = \underline{0}$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eindeutig, nur falls $\det \underline{A} \neq 0$

$\underline{b} \neq \underline{0}$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ existiert eindeutig, " " "