Wdh

- formale Einf. von Leiteroperatoren $\hat{N} = \sum_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$

$\rightsquigarrow [\hat{N}, \hat{a}_k] = -\hat{a}_k$, $[\hat{N}, \hat{a}_k^\dagger] = +\hat{a}_k^\dagger$ } 2 Möglichkeiten

a.) bosonische Statistik	b.) fermionische Stat.
$[a_q, a_k^\dagger] = \delta_{kq}$	$\{a_q, a_k^\dagger\} = \delta_{kq}$
$[a_q, a_k] = 0$	$\{a_q, a_k\} = 0 \rightsquigarrow a_q^2 = 0$
$a_k^\dagger \vert \ldots n_k \ldots\rangle = \sqrt{n_k+1}\, \vert \ldots, n_k+1, \ldots\rangle$	$a_k^\dagger \vert \ldots 0 \ldots\rangle = \pm \vert \ldots 1 \ldots\rangle$
analog a_k	a_k analog
$a_k \vert \ldots n_k \ldots\rangle = \sqrt{n_k}\, \vert \ldots, n_k-1, \ldots\rangle$	
$n_k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$	

vgl. z.B. Nolting stat. Physik + Greiner QM II

$\Rightarrow$ einfach für nicht-WW-Systeme $\hat{N} = \sum_k a_k^\dagger a_k$ $\quad \hat{H} = \sum_k \varepsilon_k a_k^\dagger a_k$

ε_k: Einteilchen-Energien

$e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}$ zerfällt in Produkte der einzelnen Moden

$= \prod_k e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu) a_k^\dagger a_k}$

- Ununterscheidbarkeit ist berücksichtigt

a.) bosonisch

$|\Psi\rangle = |0 \ldots n_i \ldots n_j \ldots 0\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{n_i!}} \frac{1}{\sqrt{n_j!}} \underbrace{(a_i^\dagger)^{n_i} (a_j^\dagger)^{n_j}}_{\text{kommutieren}} |0 \ldots 0\rangle$

b.) $|\Psi\rangle = |0 \ldots 1 \ldots 1 \ldots\rangle$

$= a_i^\dagger a_j^\dagger |0 \ldots 0\rangle$

$= -a_j^\dagger a_i^\dagger |0 \ldots 0\rangle$

- die gesamte Basis kann aus $|0 \ldots 0\rangle$ & $\{a_i^\dagger\}$ konstruiert werden $\rightsquigarrow$ Bsp. DQD

- mittl. Besetzung der k-ten Mode (großkanonisch)

a.) Bose-Einstein

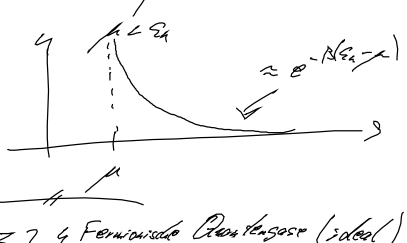
$$\langle a_k^\dagger a_k \rangle_{gc} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1}$$

$\mu < \varepsilon_k$

b.) Fermi-Dirac

$$\langle a_k^\dagger a_k \rangle_{gc} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}$$

$\mu \in \mathbb{R}$



3.2.4 Fermionische Quantengase (ideal)

$\left.\begin{matrix} N \to \infty \\ V \to \infty \end{matrix}\right\} n = \frac{N}{V} = \text{const.}$

Kastenpotential 3d: $\varepsilon_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ $\qquad n_\alpha \in \{1, 2, \ldots\}$

$\underline{k} = \frac{\pi}{L} \cdot \underline{n} \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon_{\text{kinetisch}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

diskrete Werte $\quad$ heuristisch

$$\frac{1}{V}\sum_{\underline{k}} f_{\underline{k}} = \frac{1}{V}\sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z} f_{\underline{k}}\left(\frac{\frac{L}{\pi}\Delta n_x}{\Delta k_x}\Delta k_x\right)\left(\frac{\frac{L}{\pi}\Delta n_y}{\Delta k_y}\Delta k_y\right)\left(\frac{\frac{L}{\pi}\Delta n_z}{\Delta k_z}\Delta k_z\right)$$

bel. gutartige Funkt. von k $\quad = 1 \quad$ im TD-Limes $\Delta k_x \to 0$

$$= \frac{1}{\pi^3}\int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z\, f(\underline{k}) = \frac{1}{\pi^3} 4\pi \cdot \frac{1}{8}\int_0^\infty k^2 \cdot f(k)\, dk$$

$f(\underline{k}) = f(|\underline{k}|) = f(k)$

a) $\rightsquigarrow$ berechne mittlere Gesamt-Teilchendichte im TD Limes

$$n = \frac{\langle N\rangle}{V} = \frac{\langle \sum_k a_k^\dagger a_k \rangle}{V} = \frac{1}{V}\sum_k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1} = \frac{N_{\text{int}}\cdot 1}{2\pi^2}\int_0^\infty k^2 \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon(k)-\mu)}+1}\, dk$$

z.B. freie e^-: $N_{\text{int}} = 2$ $\qquad \boxed{\text{Fugazität} \quad z = e^{+\beta\mu}}$

$x = \beta \cdot \varepsilon(k)$
$\;\; = \beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$n = N_{\text{int}} \cdot \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot g^+_{3/2}(z)$$

$$\boxed{g_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{z^{-1}e^x+1}\, dx}$$

Fermi-Integrale

$\longrightarrow$ liefert bei vorgeg. $n = \frac{N}{V}$
eine implizite Gleichung für z und damit μ

$\rightsquigarrow$ i. A. numerisch zu lösen

schwierig: μ hängt von N, V, β, usw ab
bei vorgeg. Teilchenzahl

b.) mittlere Energiedichte

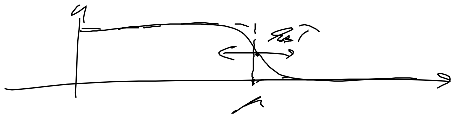
$$\frac{U}{V} = \frac{\langle \sum_k \varepsilon_k a_k^\dagger a_k \rangle}{V}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{N_{\text{int}}}{\beta}\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot g^+_{5/2}(z) \qquad U = \sum_n \frac{e^{-\beta(\varepsilon_n-\mu)}}{Z_{gc}} \cdot$$

c.) Druck: $p = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\ln Z_{gc} = \sum_n \frac{e^{-\beta(\varepsilon_n-\mu)}}{Z_{gc}}\left(-\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial V}\right) = \frac{1}{V}\cdot\frac{2}{3}\, U$

$\rightsquigarrow \quad p = \frac{2}{3}\frac{U}{V} \qquad\qquad \varepsilon_n \propto V^{-2/3} \rightsquigarrow -\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial V} = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_n}{V}$

Grenzfall $T \to 0$



$$\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \longrightarrow \Theta(\mu - \varepsilon(k))$$

$\mu(T=0) \stackrel{!}{=} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$

$\rightsquigarrow \frac{N}{V} = \frac{N_{\text{int}}}{2\pi^2}\int_0^{k_F} k^2\, dk \quad \rightsquigarrow \mu(T=0) = \left(\frac{6\pi^2 N}{N_{\text{int}}\cdot V}\right)^{2/3} \cdot \frac{\hbar^2}{2m}$

$N_{\text{int}} = 2 \rightsquigarrow$ Fermi-Energie

$\rightsquigarrow \frac{U}{V}$ analog

$\rightsquigarrow \quad p = \frac{2}{3}\frac{U}{V} = \frac{N_{\text{int}}\hbar^2}{30\pi^2 m}\left(\frac{6\pi^2 N}{N_{\text{int}}\cdot V}\right)^{5/3} \qquad$ Druck bleibt endlich trotz $T \to 0$
"Fermi-Druck" aus Pauli Prinzip

3.2.5. Bose-Einstein Kondensation

Bose-Einstein — Vorhersage 1924

Experiment 1995 — 2 Gruppen

2001 Nobelpreis

- GZ kann u.U. makroskopisch besetzt werden

=> Abspaltung des GZ. $\quad$ Kurz = 1

+ $\varepsilon_0 = 0 \quad \mu \leq 0$

$$\frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{1}{V}\sum_k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon(k)-\mu)}-1} = \underbrace{\frac{1}{V}\frac{1}{\frac{1}{z}-1}}_{\text{GZ-Anteil}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{k^2\, dk}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon(k)}-1}}_{\text{AZ-Anteil}}$$

besonders

eigentlich $\mathcal{O}\left(\frac{2\pi}{L}\right) \longrightarrow 0$

$$\boxed{\text{Bose-Einstein-Integrale} \quad g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x-1}\,dx}$$

$$\frac{N}{V} = \underline{\frac{1}{V(z^{-1}-1)}} + \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2} g_{3/2}(z) \qquad \text{Unterschied}$$

$$\frac{U}{V} = \frac{3}{2}\frac{1}{\beta}\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2} g_{5/2}(z)$$

Kondensation $\hat{=}$ makroskop. Besetzung des GZ (im TD-Limes)

- $\rightsquigarrow$ für kond. muss $z \to 1$ gehen $\qquad z = e^{\beta\mu} \leq 1$

$z^{-1} \geq 1$

bei $T \geq T_c$ sollen im TD-Limes alle Teilchen im ang. Anteil sein

$$\Rightarrow \frac{N}{V} = n \overset{!}{=} \left(\frac{m \cdot k_B \cdot T_c}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot g_{3/2}(1)$$

$$\boxed{T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m\cdot k_B}\left(\frac{n}{\zeta(3/2)}\right)^{2/3}} \qquad g_\nu(1) = \zeta(\nu)$$

krit. Temperatur

Riemannsche Zetafunktion

$\mathcal{O}(10^{-9}K) \to$ Herausforderung

$$\frac{N}{\cancel{V}} = \frac{1}{\cancel{V}}\frac{z}{1-z} + \frac{N}{\cancel{V}}\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\frac{g_{3/2}(z)}{\zeta(3/2)} \rightsquigarrow \text{Selbstkonsistenzgleichung für } z$$

$\rightsquigarrow$ numerisch nach z lösen für endliche N

$$\eta_{GZ} = \frac{1}{N}\frac{z}{1-z} \qquad \eta_{AZ} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\frac{g_{3/2}(z)}{\zeta(3/2)} \qquad \underline{\eta_{GZ} + \eta_{AZ} = 1}$$

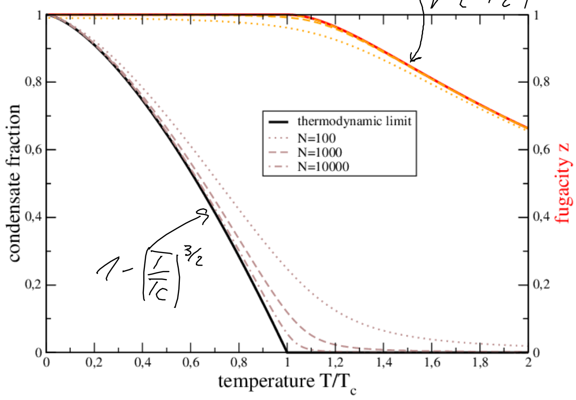
jetzt für $N \to \infty$ (TD-Limes)

für $T < T_c$ $\quad z^\infty(T<T_c) = 1$

$$\Rightarrow \eta_{GZ}^\infty = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$T > T_c \quad \eta_{GZ}^\infty = 0$

$$T > T_c : 1 = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(z)}{\zeta(3/2)}$$



Entropie des Kondensats

$$S = \frac{1}{T}\left(U + p \cdot V - \mu \cdot N\right)$$

$$\frac{S}{V} = \frac{1}{T}\left(\frac{U}{V} + P - \mu \frac{N}{V}\right) \qquad P = \frac{2}{3}\frac{U}{V}$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{5}{3}\frac{U}{V} - \mu \frac{N}{V}\right)$$

$\mu = 0$ für Kondensat

Kondensat hat keine innere Energie (Reibung)

$$S_{kond} = 0$$

- boson. Statistik wichtig
- 3d: wichtig : in 2d kein BEC möglich
- Kastenpotential $\to$ harm. Falle $\rightsquigarrow$ Modifikationen, trotzdem Kondensation möglich