VdIt Spin-Systeme

Energien sind diskret

a.) nicht-WW Spinsysteme ⇝ ZS faktorisiert ⇝ berechne ZS für einen Spin

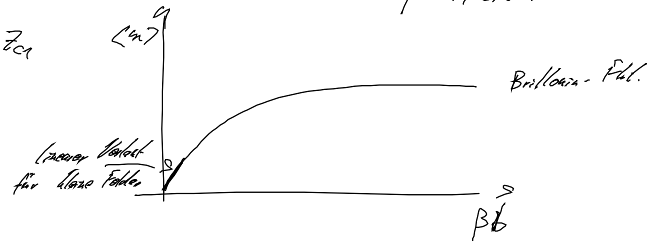
$E_m = -b\cdot m$ $\propto$ zu Bext

$$Z_{C,1} = \sum_{m=-j}^{+j} e^{+\beta\cdot b\cdot m}$$

$-j \le m \le +j$

Gesamt-Drehimpuls   z.B. $j = 1/2, 3/2, \ldots$
$j = 1, 2, \ldots$

$$\langle m\rangle = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial b}\cdot\ln Z_{C1}$$



$$Z_C = \prod_i Z_{C,i}$$

$$E_{\underline{m}} = \sum_{i=1}^{N_{spin}}\left(-b\cdot m_i\right)$$

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{N_{spin}} \end{pmatrix}$$

b.) WW-Spinsysteme: schwierig bis unmöglich

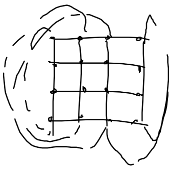
hatten: $\sigma_i \in \{-1, +1\}$

$$E_{\underline{\sigma}} = -\sum_{i=1}^{N_{spin}} b_i\sigma_i - \sum_{i,j=1}^{N_{spin}} J_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

ext. Feld   Spin-Spin-WW

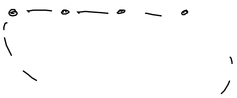
$$Z_C = \sum_{\underline{\sigma}} e^{-\beta E_{\underline{\sigma}}} = \sum_{\sigma_1\in\{-1,+1\}}\cdots\sum_{\sigma_{N_{spin}}\in\{-1,+1\}} e^{-\beta E_{\underline{\sigma}}}$$

→ berechne $2^{N_{spin}}$ Terme



i.) homogene NN-WW

$$E_{\underline{\sigma}} = -b\sum_i\sigma_i - J\sum_i\sigma_i\sigma_{i+1} \qquad \sigma_{N+1} = \sigma_1$$

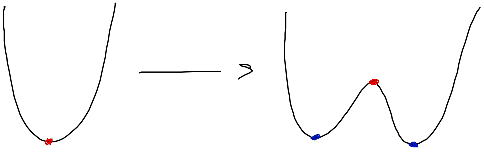


Trick: Schreibe ZS als Produkt von Matrizen ("Transfermatrix")

⇝ paramagnet. Verhalten, aber Suszeptibilität stark von J abhängig

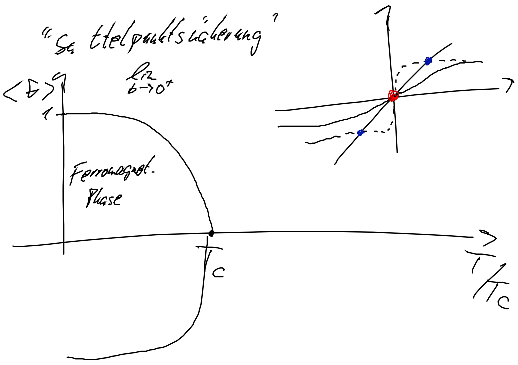
ii.) all-to-all-WW

$$E_{\underline{\sigma}} = -b\sum_i\sigma_i - \frac{J}{2N}\sum_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad \rightsquigarrow \text{Trick} \quad Z_C = \sqrt{\frac{N\cdot\beta\cdot J}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-N\cdot\beta\cdot L(x)}\,dx$$



$$L(x) = L(x_0) + \frac{1}{2}L''(x_0)(x-x_0)^2$$

"Sattelpunktsnäherung"



$$\beta_c\cdot J = 1 = \frac{J}{k_B T_c}$$

3. Quantenstatistik

haben $Z_c = \sum_n e^{-\beta E_n}$ quantisierte Energien

Was sind allg. Erwartungswerte

$|\psi\rangle \longrightarrow \rho$

$\uparrow$ Zustand Lsg der SGL

$\uparrow$ Dichtematrix

$H(\{q_i, p_i\}) \longrightarrow \hat{H}$

$U \longrightarrow \hat{U}$

} spez. Kennz. der Operat. sind weggelassen

3.1. Dichtematrix

SGL: $|\dot{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi\rangle$ allg: $H \to H(t)$

$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi_0\rangle$

$U^\dagger = U^{-1}$

$U^\dagger U = \mathbb{1}$

falls: $H = \text{const}$: $U(t) = e^{-i/\hbar \cdot H \cdot t}$

falls H nicht const: $\dot{U} = -\frac{i}{\hbar} H(t) U$

falls $[H(t), H(t')] = 0 \rightsquigarrow U(t) = \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t')dt' \right\}$

$$\langle A \rangle = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \langle \psi_0 | U^\dagger(t) \hat{A} U(t) | \psi_0 \rangle$$

$\uparrow$ klar definierter AZ

falls $P_m \hat{=}$ WS für den AZ $|\Phi_m\rangle \hat{=} |\psi_0\rangle$

$$\rightsquigarrow \langle A \rangle = \sum_m P_m \cdot \underbrace{\langle \Phi_m | U^\dagger \hat{A} U | \Phi_m \rangle}_{\langle A^{(m)} \rangle}$$

Eine Dichtematrix ρ ("stat. Operator") lässt sich darstellen als

$\rho = \sum_i P_i |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i|$

$P_i \hat{=}$ WS für den Zustand $|\Phi_i\rangle$

$\sum_i P_i = 1 \qquad 0 \le P_i \le 1$

$\langle \Phi_i | \Phi_i \rangle = 1$

- $\rho = \rho^\dagger$
- $\text{Tr}\{\rho\} = \sum_i P_i = 1$
- $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \quad \forall |\psi\rangle \iff \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$

$\uparrow$ EW von ρ

- Zustand heißt "rein" falls

$\rho_{\text{pure}}^2 = \rho_{\text{pure}} \rightsquigarrow \rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

$\langle A \rangle = \text{Tr}\{\hat{A} \cdot \rho\} = \sum_n \langle n | \hat{A} \cdot |\psi\rangle\langle\psi| n \rangle = \sum_n \langle \psi | n \rangle \langle n | \hat{A} | \psi \rangle$

$= \langle \psi | \underbrace{\left(\sum_n |n\rangle\langle n| \right)}_{\mathbb{1}} \hat{A} | \psi \rangle = \langle A \rangle$

- nicht reine ZS heißen "gemischt"

- Bsp. a) $|0\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |1\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rho = \underbrace{\frac{3}{4}}_{P_0} |0\rangle\langle 0| + \underbrace{\frac{1}{4}}_{P_1} |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

b)

$|\Psi_a\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}\,|1\rangle \quad \rightsquigarrow \quad \rho = \frac{1}{2}|\Psi_a\rangle\langle\Psi_a| + \frac{1}{2}|\Psi_b\rangle\langle\Psi_b|$

$|\Psi_b\rangle = (\;"\;) - (\;"\;)$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/4 & +\frac{\sqrt{3}}{4} \\ +\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/4 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$\langle\Psi_a|\Psi_b\rangle \neq 0$

- $Tr\{A\cdot\rho\} = Tr\{\hat{A}\sum_i P_i|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\} = \sum_i P_i \underbrace{\langle\Psi_i|A|\Psi_i\rangle}_{\langle A\rangle}$

$$\boxed{\langle A\rangle = Tr\{A\cdot\rho\}}$$

- $Tr\{A\cdot B\} = Tr\{B\cdot A\}$

  $Tr\{ABC\} = Tr\{CAB\}$
- $Tr\{A\} = Tr\{U^+ U A\}$

  $= Tr\{\underbrace{U A U^+}_{A_D}\} = \sum_a \lambda_a$

EW von A

$A = \sum_a \overset{\text{EW von } A}{\lambda_a}\, |\upsilon_a\rangle\langle\upsilon_a|$

$|\upsilon_a\rangle\; \langle\upsilon_a|$

- $Tr\{f(A)\} = \sum_a f(\lambda_a)$

3.1.1. Entwicklungsgleichung für isol. Systeme

- $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = U(t)\,|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|\,U^+(t)$

  $\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}H(t)\rho(t) + \frac{i}{\hbar}\rho(t)H(t) = -\frac{i}{\hbar}[H(t),\rho(t)]$

→ analog für eine gemischte DM

$\Rightarrow \boxed{\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H(t),\rho(t)] \quad \text{von-Neumann-Gleichung}}$

+ äquivalent zur SGL

$\rho(t) = U(t)\,\rho_0\,U^+(t)$

$\dot{U} = -\frac{i}{\hbar}H(t)U(t)$

$\dot{U}^+ = +\frac{i}{\hbar}U^+(t)H(t)$

- falls ρ_0 eine valide DM: auch $\rho(t)$ ist eine valide DM

- Bilder in QM: $\langle A\rangle = \langle\Psi_0|\underbrace{U^+\hat{A}U}_{A_H}|\Psi_0\rangle \quad A_H \rightsquigarrow \dot{A}_H = +\frac{i}{\hbar}[H,A]$ Sonderstellung des stat. Operators

3.1.2. Entwicklung bei Messprozess

- Satz von Mess-Operatoren M_m: $\sum_m \hat{M}_m^+ M_m = \mathbb{1}$

$M_m = |m\rangle\langle m|$

$M_m^+ M_m = |m\rangle\langle m|m\rangle\langle m| = |m\rangle\langle m|$

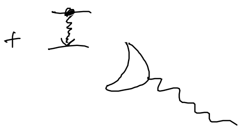
- nicht alle Messungen sind projektiv

+ Bsp.: $M_0 = \sqrt{1-P_{fail}}\,|0\rangle\langle 0| \quad M_1 = \sqrt{1-P_{fail}}\,|1\rangle\langle 1| \quad M_2 = \sqrt{P_{fail}}\,[|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|]$

↑ FehlerWS

$\rightsquigarrow M_0^+ M_0 + M_1^+ M_1 + M_2^+ M_2 = \mathbb{1}$

+



P_z: Zerfalls-WS in Δt

P_d: Detektions-WS "

$\sum_k M_k^+ M_k = \mathbb{1}$

$M_{click} = \sqrt{P_z\cdot P_d}\,|g\rangle\langle e|$

$M_{noclick} = |g\rangle\langle g| + \sqrt{1-P_z\cdot P_d}\,|e\rangle\langle e|$

$$\rightsquigarrow \quad |\Psi\rangle \xrightarrow{(m)} \frac{M_m|\Psi\rangle}{\sqrt{\underbrace{\langle\Psi|M_m^\dagger M_m|\Psi\rangle}_{P_m}}} \qquad M_m \Rightarrow |m\rangle\langle m|$$

$$P_m \longrightarrow |\langle\Psi|m\rangle|^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho \xrightarrow{m} \rho' = \dfrac{M_m \rho M_m^\dagger}{\mathrm{Tr}\{M_m^\dagger M_m \rho\}} \longrightarrow \dfrac{|m\rangle\langle m|\rho|m\rangle\langle m|}{\mathrm{Tr}\{|m\rangle\langle m|\rho\}} \\ \text{WS für Messresultat } m: \; P_m = \mathrm{Tr}\{M_m^\dagger M_m \rho\} \end{array}}$$

$$\circ \quad \langle\Psi|\rho'|\Psi\rangle = \frac{\langle\Psi|M_m \sum_\ell \underbrace{\rho_\ell}_{\geq 0} |\ell\rangle\langle\ell| M_m^\dagger|\Psi\rangle}{P_m} = \sum_\ell \frac{|\langle\Psi|M_m|\ell\rangle|^2}{P_m} \cdot \rho_\ell \geq 0$$