

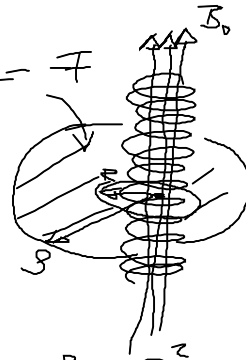
# Aharonov-Bohm-Effekt (II): Originalrechnung

AB-Effekt einer idealisierten Spule

(1.) Ansatz: 
$$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \vec{e}_z, & |r| \leq R \\ 0, & |r| > R \end{cases}$$

[das ist eine Bedingung, die wir an die Experimentatoren stellen]

$$\Theta(r-R) \delta(z) = J$$



(2.) Fluss durch die Fläche

$$\int_F d\vec{f} \cdot \vec{B} = [\text{Zylinderkoordin.}] =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho \, d\phi \, d\rho \, dz \, \vec{e}_z \cdot \vec{B} = 2\pi \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^\infty dz = B_0 \pi R^2$$

$$= \int_F d\vec{f} \cdot \nabla \times \vec{A} = \oint_{\partial F} ds \cdot \vec{A} \quad [\text{beliebige geschlossene Kurve um die Fläche } F]$$

(3.) wie sieht das Vektorpotential aus?

homogenes Magnetfeld 
$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

$$= \frac{1}{2} B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{B_0}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$
 innerhalb der Spule, weil wir das B-Feld angeleitet haben

$\vec{A}$  kann außerhalb der Spule nicht null sein

wegen

$$\oint_{\partial F} ds \cdot \vec{A} = B_0 \pi R^2$$

(extreme Nichtlokalität) für  $F$ , durch die die Spule vollständig fließt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{B_0}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, & |\vec{r}| \leq R \\ \frac{B_0 R^2}{2} \begin{pmatrix} -y/x^2+y^2 \\ x/x^2+y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, & |\vec{r}| > R \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \end{array}$$

$$\vec{A}(\rho, \phi) = \begin{cases} \frac{B_0}{2} \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, & \rho \leq R \\ \frac{B_0 R^2}{2} \begin{pmatrix} -\frac{\rho \sin \phi}{\rho^2} \\ \frac{\rho \cos \phi}{\rho^2} \\ 0 \end{pmatrix}, & \rho > R \end{cases}$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y$$

$$\vec{A}(\rho, \phi) = \begin{cases} \frac{B_0}{2} \rho \vec{e}_\phi, & \rho \leq R \\ \frac{B_0 R^2}{2} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\phi, & \rho > R \end{cases} \Rightarrow \oint d\vec{s} \cdot \vec{A} = \begin{cases} \frac{B_0}{2} \rho^2 \pi, & \rho \leq R \\ \frac{B_0 R^2}{2} \pi, & \rho > R \end{cases}$$

$\Rightarrow$  ist stetig  $R$ ! Randbedingungen erfüllt  
Magnetischer Fluss konstant, wenn  $\rho > R$

(4.) Frage: Kann  $\vec{A}$  außerhalb der Spule weggelassen werden?

$$\chi'(\vec{r}) = \chi(r) e^{i\chi(\vec{r})}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \stackrel{!}{=} 0$$

$$\vec{A}_{\text{ex}} = \frac{B_0 R^2}{2} \begin{pmatrix} -y/x^2+y^2 \\ x/x^2+y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} -\nabla \chi = - \begin{pmatrix} \partial_x \chi \\ \partial_y \chi \\ \partial_z \chi \end{pmatrix}$$

$$\chi(x, y) = -\frac{B_0 R^2}{2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\int d\vec{s} \cdot \vec{A}$$

explizite Antwort

|| Integral  $[\chi, \vec{r}]$  ist nur eine Funktion von  $\vec{r}$   
|| wenn unabhängig von Weg d.h.  $\nabla \times \vec{A} = 0$  ||

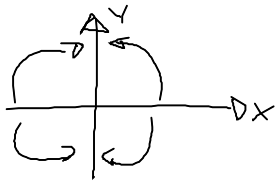
$$\partial_x \chi = -\frac{B_0 R^2}{2} \frac{1}{1+(y/x)^2} \partial_x \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{B_0 R^2}{2} \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\partial_y \chi = -\frac{B_0 R^2}{2} \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \vec{A}'(x, y) = 0$$

(geschafft!)

Achtung:  $\chi$  muss differenzierbar sein und zwar auf der gesamten Fläche.  $\chi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in \mathbb{R} \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2}$

$$\begin{aligned} \chi(x, y) &\rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ für } y > 0, x \rightarrow 0^+ \\ &\rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ für } y > 0, x \rightarrow 0^- \\ &\rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ für } y < 0, x \rightarrow 0^- \\ &\rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ für } y < 0, x \rightarrow 0^+ \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sprung um } \pi \\ \\ \text{Sprung um } \pi \end{array}$$



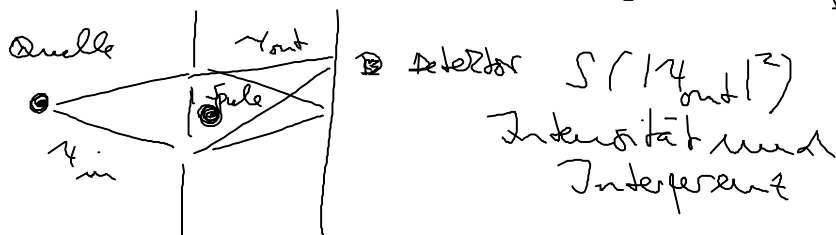
nicht stetig bei  $y = 0$

$\rightarrow \chi$  ist keine gültige Eichfunktion!

Regularisierung hilft nicht, Uneichen geht nicht (Stand: heute), das Problem muss mit Vektorpotential gelöst werden.

(6.) Steuerung: Originalrechnung  
[Kirsten: Electrodynamics]

Ansammlung von Elektronen, Ensemblemessung am Doppelspalt  $\rightarrow \hat{L} \hat{\Theta}_c \psi = H \psi = \frac{(\hat{P} - q\hat{A})^2}{2m} \psi$



wie messen über eine endliche Winkelverteilung  $\frac{dS(\theta)}{d\Omega} = |\psi_{out}|^2$

gesucht ist  $\psi_{out}$ ,  $\psi_{in}$  ist gegeben, Schrödingergl. gilt

$$\psi = \psi_{in} + \psi_{out} \quad (\text{aufteilen in vorwärts- und rückwärtspropagierend})$$

(i) Hamilton in Zylinderkoordinaten

$$(\vec{p} - q\vec{A})^2 \psi = -\hbar^2 \left[ \partial_r \vec{e}_r + \left[ \frac{1}{r} \partial_\varphi - \frac{e q r A}{\hbar} \right] \vec{e}_\varphi + \partial_z \vec{e}_z \right] \psi$$

$$(\vec{p} - q\vec{A})^2 \psi = (-\hbar^2) \left[ \frac{1}{r} \partial_r + \partial_r^2 + \frac{1}{r^2} \left[ \partial_\varphi - \frac{e q r A}{\hbar} \right]^2 + \partial_z^2 \right] \psi$$

$$(\vec{p} - q\vec{A})^2 \psi = (-\hbar^2) \left[ \frac{1}{r} \partial_r + \partial_r^2 + \frac{1}{r^2} \left[ \partial_\varphi + k\alpha \right]^2 + \partial_z^2 \right] \psi$$

$$\alpha = -\frac{2\pi r q}{h} A = -\frac{q\Phi}{h} \quad \vec{A} = \sqrt{\alpha} \vec{e}_\varphi$$

unser Problem ist zeitunabhängig, da Magnetfeld konstant  $\boxed{H\psi = E\psi}$  Eigenwertgl. lösen

Ansatz:  $\psi(r, \varphi, z) = \underbrace{\sum_{m'} \psi_{m'}(r)}_{\text{r und } \varphi \text{ sind getrennt}} e^{i m' \varphi} \underbrace{e^{i k z}}_{z \text{ entkoppelt}}$

$$\underbrace{\left[ \partial_\varphi + k\alpha \right]}_{\text{verschobener Impuls}} \left[ \partial_\varphi + k\alpha \right] e^{i m' \varphi} = \dots = -[m' + \alpha]^2 e^{i m' \varphi}$$

$$\left[ \frac{1}{r} \partial_r + \partial_r^2 - \frac{[m' + \alpha]^2}{r^2} + (\lambda^2 - k_z^2) \right] \psi_{m'}(r) = 0$$

$\Rightarrow$  das löst die Besselfunktion

$$\Rightarrow \psi(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i m \varphi} \left[ a_m J_{|m+\alpha|}(\lambda r) + b_m J_{-|m+\alpha|}(\lambda r) \right]$$

$\alpha := \text{Flux}$ ,  $\lambda := \text{Impuls}$   
 $\varphi := \text{Beobachtungswinkel}$

$|\psi(0, \varphi, z)| < \infty$ , ist regulär bei  $r=0$ , also  $b_m = 0$

$$\psi(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i m \varphi} a_m J_{|m+\alpha|}(\lambda r)$$

$$J_{|m \pm \alpha|}(\lambda r) = \frac{1}{2} (H_{|m \pm \alpha|}^{(1)}(\lambda r) + H_{|m \pm \alpha|}^{(2)}(\lambda r))$$

weil wir nur an  $\lambda r \rightarrow \infty$  interessiert sind, Dekktor im Fernfeld  
 also Fernfeldnäherung  $H_{|m \pm \alpha|}^{(1)}(\lambda r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} e^{i(\lambda r - \frac{|m \pm \alpha| \pi}{2} + \frac{\pi}{4})}$   
 $H_{|m \pm \alpha|}^{(2)}(\lambda r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} e^{-i(\lambda r - \frac{|m \pm \alpha| \pi}{2} - \frac{\pi}{4})}$

Ansatz: einfallende Welle von rechts ( $e^{ikx}$ )

$$\psi_{\text{gesamt}} = \psi_{\text{in}} e^{-ikx} + \psi_{\text{scat}} e^{ikx}$$

(gestreute Welle muss die Richtung wechseln)

$$\psi_{\text{in}} = e^{-ikx} = e^{-i\lambda r \cos \varphi}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n e^{in\varphi} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} \cos\left(\lambda r - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda r}\right) \right\}$$

$$\psi - \psi_{\text{in}} - \psi_{\text{sc}} = 0 \quad (\text{Koeffizientenvergleich})$$

$$\psi_{\text{sc}} = \frac{e^{-ikr}}{r} f(\varphi)$$

$$\Rightarrow f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-i)^m}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \left\{ e^{i\lambda r \frac{\pi}{2}} \delta_m(\alpha) - 1 \right\} e^{ikr\varphi}$$

$$\delta_m(\alpha) = \frac{\pi}{2} [1 + \alpha |m|]$$

$\Rightarrow$  Phase shiftet in Abhängigkeit vom  $\ell$

um  $f(\varphi)$  explizit auszurechnen, brauchen wir die sogenannte Henneberger  $S$ -Matrix

Betrachte die Streuphase (Ansatz)

$$S_\alpha(\varphi) = \delta(\varphi) \cos(\pi\alpha) + i \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} e^{-i[\alpha]\varphi} \frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}$$

$[\alpha]$ , heißt nächst  
höheres Integer

$$S_\alpha(\varphi) \text{ Fouries-Zerlegt ergibt } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [e^{i\varphi} \delta_n(\alpha) - 1] e^{in\varphi}$$

$$f_\alpha(\varphi) = \left(\frac{2\pi}{\hbar k}\right)^{1/2} \left[ \delta(\varphi) [\cos[\pi\alpha] - 1] + i \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} e^{-i[\alpha]\varphi} \frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1} \right]$$

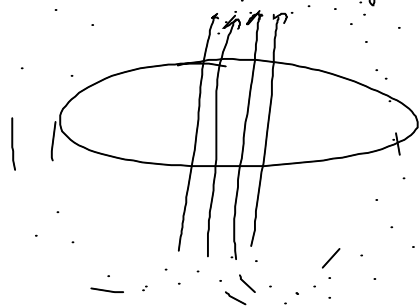
$$\frac{dS(\varphi)}{d\varphi} = |f_\alpha(\varphi)|^2 = \dots = \frac{1}{\pi k} \frac{\sin^2 \pi\alpha}{\sin^2 [\frac{\varphi}{2}]}$$

das ist der AD-Effekt

$\Rightarrow$  Streuamplitude verschwindet für  $\alpha$  gleich  
Integer

$\Rightarrow$  verschwindender und auftauchender  
Strikt in der Interpretation

(7.) Frage: idealisierte Spule realistisch?



$$\text{div } \vec{B} = 0$$