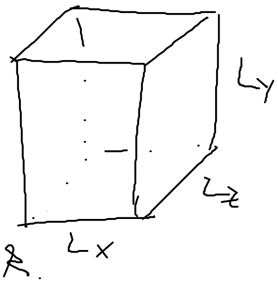
Casimir-Effekt:



Sei $L_x = L_y = L$ und $L \gg L_z$

Klassische Elektrodynamik.
Moden sind nicht aus der QM, alleine durch Randbedingungen bestimmte Amplitudenverteilungen.

(1.) Maxwellgl. im Vakuum
(2.) Vektorpotential $\vec{A}$, dafür Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$
(3.) Separationsansatz: $\vec{A} = \sum_\lambda q(t)\, \vec{V}(\vec{r})$
(4.) Modenentwicklung (Entwicklung nach ebenen Wellen)
(5.) Randbedingung: $\vec{e}_{r\parallel} \cdot \vec{E} = 0$, $\vec{e}_{r\perp} \cdot \vec{B} = 0$
(6.) Geometrie der Box nutzen

$$V_x(\vec{r}) = \sqrt{\frac{8}{V}}\, \underline{\underline{a_x}}\, \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$
$$V_y(\vec{r}) = \sqrt{\frac{8}{V}}\, \underline{\underline{a_y}}\, \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z)$$
$$V_z(\vec{r}) = \sqrt{8/V}\, \underline{\underline{a_z}}\, \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z)$$

$$\vec{e} = (a_x, a_y, a_z) \qquad \boxed{\vec{e} \cdot \vec{e} = 1}$$

(7.) Moden an die RB anpassen
$$k_x = \frac{l_x \pi}{L_x}, \quad k_y = \dots$$

(8.) Moden an die Eichung anpassen
$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$0 = \sqrt{\frac{8}{V}} \left\{ a_x k_x + a_y k_y + a_z k_z \right\} \underline{\underline{\sin(k_x x)}}\, \underline{\underline{\sin(k_y y)}}\, \underline{\underline{\sin(k_z z)}}$$

Zwei Fälle: (i) $\lambda_x \neq 0, \lambda_y \neq 0, \lambda_z \neq 0$

λ_z festgelegt $\Rightarrow$ 2 Polarisation, in der Ebene x–y

(ii) $\lambda_x = 0$ oder $\lambda_y = 0$

$\Rightarrow$ nur eine Polarisation

(9.) $$H = \int d^3r \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell = \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \leftarrow \text{Mode} \\ p \leftarrow \text{Polarisation}}} \left[\dot{q}^2(\ell) + (\hbar\omega_\ell)^2 q_\ell^2 \right]$$

Entwicklungskoeffizienten des Zeitanteils

$$\omega = c|\lambda| = c\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}$$

$$\hat{=}\ H = \frac{1}{2} \sum_{\ell, p} \hbar\omega_\ell \left[a_{\ell,p}^* a_{\ell,p} + a_{\ell,p} a_{\ell,p}^* \right]$$

$$a_\ell = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\ell}} \left[\omega_\ell q_\ell + i \dot{q}_\ell \right]$$

(11.) $a_{\ell p}^* \rightarrow \hat{a}_{\ell p}^+$, $a_{\ell p} \rightarrow \hat{a}_{\ell p}$

Kommutatorrelation, die erhalten wir aus dem Korrespondenzprinzip

$$i\hbar \partial_t \langle A \rangle = \langle [H, A] \rangle + \langle \partial_t A \rangle$$

$$-i\hbar\, \partial_t \vec{E} = i \nabla \times B$$

$$[\hat{a}_{\ell' p'}, \hat{a}_{\ell' p'}^+] = \delta_{\ell\ell'} \delta_{pp'}$$

(12.) $$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \sum_{\ell, p} \omega_\ell \left[2 a_{\ell p}^+ a_{\ell p} + 1 \right]$$

$$\boxed{E = \langle H \rangle \Big|_{T=0} = \sum_{\ell, p} \frac{\hbar \omega_\ell}{2}}$$ Startpunkt

(13.) Crosscheck: Orthonormalitätsbedingung für $\vec{A}$: $\int d^3r \, |A(\vec{r})|^2 \overset{!}{=} 1$

$$E = \sum_{lmn}{}' \sum_{pol} \hbar c \left[\frac{\pi^2 l^2}{L^2} + \frac{\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L_z^2} \right]^{1/2}$$

$L_x = L$, $L_y = L$

Annahme: $L \gg \lambda$, $L \gg L_z = d$

$$E(d) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \sum_{pol(n)} \frac{\hbar c}{2} \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2}}$$

Polarisationssumme auswerten für diskrete Moden (n), für die kontinuierlichen spielt das scheinbar keine Rolle [Rand des Integrals]

$$E(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2 2} \left\{ \underbrace{1 \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \sqrt{x^2+y^2}}_{\text{Fall } n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \sqrt{x^2+y^2+\frac{\pi^2 n^2}{d^2}} \right\}$$

von Anfang an

$$E(\infty) = [L \gg \lambda, d \gg \lambda] = \frac{\hbar c L^2 d}{\pi^3} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$U(d) = E(d) - E(\infty)$$

$$= \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \sqrt{x^2+y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \sqrt{x^2+y^2+\frac{\pi^2 n^2}{d^2}} \right.$$
$$\left. - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right\}$$

$z = z' \frac{\pi}{d}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$

$x = \sqrt{\rho} \cos\varphi$, $y = \sqrt{\rho} \sin\varphi$

$$\boxed{\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \sqrt{x^2+y^2} = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty d\rho \sqrt{\rho}}$$

$$U(d) = E(d) - E(\infty) =$$

$$= \frac{\hbar c L^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty d\rho \, \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{\rho d^2}{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty d\rho \, \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{d^2 \rho}{\pi^2} + n^2} \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty d\rho \int dn \, \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{d^2 \rho}{\pi^2} + n^2} \right\}$$

$$\rho' = \frac{d^2 \rho}{\pi^2} , \quad d\rho' = \frac{d^2}{\pi^2} d\rho , \quad d\rho = \frac{\pi^2}{d^2} d\rho'$$

$$f(\xi) = \int_0^\infty d\rho' \sqrt{\rho' + \xi^2}$$

$$= \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4 d^2} \boxed{\left\{ \frac{1}{2} \underline{\underline{f(0)}} + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int dn \, f(n) \right\}}$$

[gemäß: Schleich, Quantenoptik im Phasenraum]

$$f(x) = \int_0^\infty d\rho \sqrt{\rho + x^2} = \left[\begin{matrix} u = \rho + x^2 \\ du = d\rho \end{matrix} \quad u\big|_{\rho=0} = x^2 , \; u\big|_{\rho\to\infty} = \infty \right]$$

$$= \int_{x^2}^{\infty} du \sqrt{u} = \frac{1}{3/2} u^{3/2} \Big|_{x^2}^{\infty}$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{2}{3} u^{3/2} - \frac{2}{3} x^3 =: f(x)$$

Euler-Maclaurin-Formel

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^\infty dn \, f(n) \right\| = -\frac{1}{2} \underline{\underline{f(0)}} + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_0^\infty dn \, f(n)$$

$$= -\frac{1}{12} f'(0) + \frac{1}{720} f'''(0) + \ldots$$

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4 d^3} \left[\frac{1}{2} \underline{\underline{f(0)}} + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int dn \, f(n) \right]$$

$$= \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4 d^3} \left[-\frac{1}{12} f'(0) + \frac{1}{720} f'''(0) + \ldots \right]$$

$f(0)$ hebt sich weg

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\underbrace{\lim_{u\to\infty}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}}_{\text{eine Konstante in } x \to 0} - \frac{2}{3}x^3\right\}$$

$$= -2x^2$$

$$f''(x) = -4x \quad , f'''(x) = -4 \quad , f''''(0) = 0$$

$$f'(x)\Big|_{x=0} = 0 \quad f''(x)\Big|_{x=0} = 0 \quad , f'''(x)\Big|_{x=0} = -4 \;/\!/$$

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2\pi^2}{4d^3}\left[-\frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{720}f'''(0)\right]$$

$$= \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{\cancel{4} d^3}\left(\frac{-\cancel{4}}{720}\right) = -\frac{\hbar c \pi^2}{720}\frac{L^2}{d^3}$$

der Druck $\quad p = \frac{F}{A} = \frac{1}{L^2}\left(-\frac{\partial U}{\partial d}\right) = -\frac{\hbar c \pi^2}{240}\frac{1}{d^4} \;/\!/$

experimentell bestätigt //

<u>ABER</u>: heuristische Herleitung

- Euler–Maclaurin, die es nur bewiesen $f(\infty) \to 0$, also hier ungültig
- $\frac{d}{dx}\lim_{u\to\infty}\frac{2}{3}u^{3/2} = ???$
- beängstigend $\frac{1}{2}f(0)$
  ↑ Polarisationsabhängigkeit

und zwar <u>nur</u> für die diskreten Moden

$\Longrightarrow$ alles hängt davon ab, dass sich $f(0)$ heraushebt

Probleme: • Milonni führt cut-off Fkt. ein, aber löst das Integral nicht, sondern diskutiert Integral weg [Quantum vacuum, Buch]

• Euler-Maclaurin anwenden, immer das Polarisationproblem

• Kleniert erklärt den CPZF über die Riemann-Zeta-Fkt., analytische Fortsetzung

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad (s>1)$$

zeigen (Analogieschluss),

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \mathrel{\hat{=}} \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+\ldots = -\frac{1}{2}$$

(Polemik)

$\Rightarrow$ es kommt die richtige Casimir-Polder-Kraft heraus