

Bellsche Ungleichung: $|P(a,b) - P(a,c)| \leq 1 + P(b,c)$
 mit $P(a,b) = \int d\lambda g(\lambda) A(a,\lambda) B(b,\lambda)$

Wiederholung:

(1.) HVT ("hidden variable theories") haben zum Ziel, Mess-Schemata zu finden, mit deren Hilfe eine Größe \vec{x} ohne statistische Streuung zu ermitteln ist. $\langle \vec{x} \rangle_{HVT} = 0$

(2.) Beispiel: $E_{\lambda}(\vec{x}) = \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{wenn } \vec{\lambda} \cdot \vec{x} \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{wenn } \vec{\lambda} \cdot \vec{x} < 0 \end{cases}$
 $\vec{x} \equiv \vec{B}$

(3.) wir können zeigen, dass die Mittelung über alle λ unseren quantenmech. MW wieder ergibt.

$$\int d\lambda E_{\lambda}(\vec{x}) = \langle \vec{x} \rangle_{HVT} \stackrel{!}{=} \langle \vec{x} \rangle_{QM}$$

(4.) von Kennerman hat gezeigt (14), es gibt keine solche "hidden variable", dass $\langle \vec{x} \rangle_{QM} = \text{tr}(S\vec{x}) \rightarrow \Delta x > 0$ für nicht triviale Systeme

(5.) die Frage ist nun, ob Eigenwertmessungen alleine ausreichen, um jedes qm. Messergebnis im Mittel zu reproduzieren

Bell-Ansatz: $P(a,b) = \int d\lambda g(\lambda) A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b})$
 ist es immer $\overline{P(a,b)} = \langle (a,b) \rangle_{QM}$

heute werden wir sehen, dass der multiplikative Ansatz (einfachste und reinste Form der Messung) nicht ausreicht!

\Rightarrow nicht jede "hidden variable theory" reproduziert die QM im Mittel

\Rightarrow lokale, multiplikative, separable Theorien stehen im Widerspruch zur QM, und können hart ausgeschlossen, wenn die QM experimentell bestätigt wird

$$\begin{array}{l} \text{--- } |z\rangle \\ \downarrow \\ \text{--- } |1\rangle \\ \downarrow \\ \text{--- } |0\rangle \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad |4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1\rangle_1 |1\rangle_2 - |0\rangle_1 |0\rangle_2 \}$$

$$\langle \vec{\sigma}^1 \cdot \vec{a} \vec{\sigma}^2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Wir wollen zeigen, dass $P(a,b) \neq -\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist für mindestens eine Kombination \vec{a}, \vec{b}

$$|\overline{P(a,b)} + \vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \epsilon$$

$$\{ P(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \}$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \delta$$

$$\dots \quad 1 \leq |\overline{P(a,b)} + \vec{a} \cdot \vec{b}| + \delta \leq \epsilon + \delta$$

$$| \overline{\mathcal{P}(a,b)} + \overline{a \cdot b} - \delta | \leq | \overline{\mathcal{P}(a,b)} + \overline{a \cdot b} | + \delta$$

$$| \overline{\mathcal{P}(a,b)} + \overline{a \cdot b} - (\overline{a \cdot b} - a \cdot b) |$$

$$= \boxed{ | \overline{\mathcal{P}(a,b)} + a \cdot b | \leq \varepsilon + \delta }$$

$$\overline{\mathcal{P}(a,b)} = \int d\lambda g(\lambda) \overline{A(a,\lambda)} \overline{B(b,\lambda)}$$

$$\overline{\mathcal{P}(a,b)} - \overline{\mathcal{P}(a,c)} = \int d\lambda g(\lambda) [\overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(b)} - \overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(c)}]$$

$$= \int d\lambda g(\lambda) [\overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(b)} + \overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(b)} \overline{A_\lambda(b)} \overline{B_\lambda(c)} - \overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(b)} \overline{A_\lambda(b)} \overline{B_\lambda(c)} - \overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(c)}] = 0$$

$$= \int d\lambda g(\lambda) \overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(b)} [1 + \overline{A_\lambda(b)} \overline{B_\lambda(c)}]$$

$$- \int d\lambda g(\lambda) \overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(c)} [1 + \overline{A_\lambda(b)} \overline{B_\lambda(b)}]$$

$$| \overline{\mathcal{P}(a,b)} - \overline{\mathcal{P}(a,c)} | = | \int d\lambda \dots |$$

$$\leq \int d\lambda | \dots | \leq \int d\lambda g(\lambda) | \overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(b)} | | 1 + \overline{A_\lambda(b)} \overline{B_\lambda(c)} |$$

$$+ \int d\lambda g(\lambda) | \overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(c)} | | 1 + \overline{A_\lambda(b)} \overline{B_\lambda(b)} |$$

$$\leq \int d\lambda g(\lambda) [1 + \overline{A_\lambda(b)} \overline{B_\lambda(c)} + 1 + \overline{A_\lambda(b)} \overline{B_\lambda(b)}]$$

$$| \overline{\mathcal{P}(a,b)} - \overline{\mathcal{P}(a,c)} | \leq \int d\lambda g(\lambda) [2 + \overline{A_\lambda(b)} \overline{B_\lambda(c)} + \overline{A_\lambda(b)} \overline{B_\lambda(b)}]$$

was
bedeutet
das

$$|\overline{P(a,b)} + a \cdot b| \leq \delta + \epsilon$$

$$|\overline{P(a,a)} + 1| \leq \delta + \epsilon$$

$$|\overline{P(a,a)} + 1| = \left| \int d\lambda g(\lambda) \overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(a)} + 1 \right|$$

$$= \int d\lambda g(\lambda) [\overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(a)} + 1] \leq \epsilon + \delta$$

$$d\lambda g(\lambda) [\overline{A_\lambda(a)} \overline{B_\lambda(a)} + 1] \leq \epsilon + \delta$$

$$\int d\lambda g(\lambda) [1 + \overline{A_\lambda(b)} \overline{B_\lambda(c)} + \epsilon + \delta]$$

$$= 1 + \overline{P(b,c)} + \epsilon + \delta$$

$$|\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)}| \leq 1 + \overline{P(b,c)} + \epsilon + \delta$$

$$|\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)}| \leq 2(\epsilon + \delta) \text{ (Ausgangspunkt)}$$

$$|\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)}| + 2(\epsilon + \delta) - 2(\epsilon + \delta) > 0$$

$$\gg |\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)}| + |-\overline{P(a,b)} - a \cdot b|$$

$$+ |\overline{P(a,c)} + a \cdot c|$$

$$- 2(\varepsilon + \delta)$$

$$= |a \cdot c - a \cdot b| - 2(\varepsilon + \delta)$$

$$1 + \overline{P(b, c)} + \varepsilon + \delta > |\overline{P(a, b)} - \overline{P(a, c)}|$$

$$> |a \cdot c - a \cdot b| - 2(\varepsilon + \delta)$$

und es gilt $x, y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

$$\overline{P(b, c)} + b \cdot c \leq |\overline{P(b, c)} + \vec{b} \cdot \vec{c}| \leq \varepsilon + \delta$$

$$\overline{P(b, c)} \leq -\vec{b} \cdot \vec{c} + \varepsilon + \delta$$

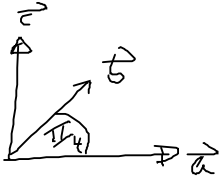
$$1 + 2(\varepsilon + \delta) - b \cdot c > 1 + \varepsilon + \delta + \overline{P(\vec{b}, \vec{c})}$$

$$> |\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}| - 2(\varepsilon + \delta)$$

$$4(\varepsilon + \delta) > |\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}| + \vec{b} \cdot \vec{c} - 1$$

(eigentliche Bellsche Ungleichung)

Beispiel:



$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \quad \begin{matrix} |a| = 1 \\ |b| = 1 \\ |c| = 1 \end{matrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$4(\varepsilon + \delta) > \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

δ beliebig kleine Variation um $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
 ε nicht gegen null

\Rightarrow nicht jeder Ansatz für $P(a, b)$
 reproduziert den gem. Mittelwert

Bell (1965) konstruiert Widerspruch zwischen
 quantenmechanischer Vorhersage und multiplikativer,
 d. h. separabler HVT (Lokal)

\Rightarrow wenn wir eine HVT suchen,
dann nicht lokale Kommen
in Frage (nicht multiplikativ)

aufgrund welcher Annahmen von Bell

$$(i) A_X(a) = \pm 1, B_Y(b) = \pm 1$$

$$(ii) A_X(a) = -B_Y(a)$$

$$(iii) P(a,b) = \int dX g(X) A_X(a) B_X(b)$$

nächste Schritte: (1.) Voraussetzung (ii) fallen
lassen CHSH-Ungleichung

(2.) Voraussetzung (i) abschwächen
 \rightarrow B-CHSH-Ungleichung

(3.) B-CHSH Ungleichung ist endlich
praktische
 \rightarrow Aspect-Experiment