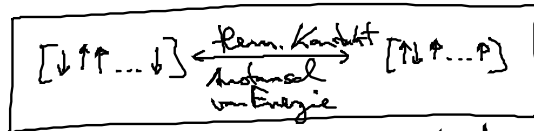


4.4 Spinsysteme im therm. Kontakt

- Ziel: (1) mikroskop. Zugang zu S !
(2) Wahrscheinlichste Konfiguration bestimmt Mittelwerte physikal. Größe!

System:



therm. isoliert: $U = U_1 + U_2 = \text{konst.}$

Frage: Wahrscheinlichste Aufteilung in U_1, U_2 & Eigenschaften?

a) Wahrscheinlichste Konfiguration

System im Kontakt: $N = N_1 + N_2$ (4.17)

$n = n_1 + n_2$ (4.18) $2n_1 = N_1^{\uparrow} - N_1^{\downarrow}$

$U(n) = U_1(n_1) + U_2(n_2)$

$= -2mB(n_1 + n_2) = -2m n B$ (4.19)

i.F. o.B.d.A. $N_1 < N_2$, N_1, N_2 gerade

therm. Kontakt:

davor: $n_1 \sim U_1, n_2 \sim U_2$ fest

$\rightarrow g_1(n_1, N_1) g_2(n_2, N_2) \dots$ erreichbare Zustände

danach: $n = n_1 + n_2 \sim U$ fest, n_1 variabel $\rightarrow n_2 = n - n_1$

\rightarrow erreichbare Zustände sehr viel größer

(i) Entartungsfkt.

$g(n, N) = \sum_{n_1 = -\frac{N_2}{2}}^{\frac{N_1}{2}} g_1(n_1, N_1) g_2(n - n_1, N_2)$ (4.20)

(ii) Wahrscheinlichkeit für Spinzustand n_1 :

$P_n(n_1) = \frac{g_1(n_1, N_1) g_2(n - n_1, N_2)}{g(n, N)}$ (4.21)

Wahrscheinlichster Spinzustand n_1 ?

(i) notwendige Bedingg:

$d \{ g_1(n_1, N_1) g_2(n_2, N_2) \} = 0$ (4.22) mit $n = n_1 + n_2 \rightarrow dn_1 = -dn_2$

Trick: $g_1 g_2 > 0 \rightarrow \frac{d(g_1 g_2)}{g_1 g_2} = d(\ln g_1 g_2) = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{also: } d(\ln g_1 g_2) &= d(\ln g_1) + d(\ln g_2) \\
 &= \frac{\partial \ln g_1}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial \ln g_2}{\partial n_2} dn_2 \\
 (dn_1 = -dn_2) &= \left(\frac{\partial \ln g_1}{\partial n_1} - \frac{\partial \ln g_2}{\partial n_2} \right) dn_1 \stackrel{!}{=} 0 \\
 &\rightarrow \boxed{\frac{\partial \ln g_1}{\partial n_1} = \frac{\partial \ln g_2}{\partial n_2}} \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

$$\text{Es war: } g_i = g_i(0, N_i) e^{-2n_i^2/N_i} \quad (4.11)$$

$$(4.23) \rightarrow \boxed{\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = \frac{n}{N}} \quad (4.24)$$

$n_1 + n_2 = n$
 $N_1 + N_2 = N$... gleicher rel. Spinüberschuß

(ii) Maximum?

$$\frac{\partial^2 \ln(g_1 g_2)}{\partial n_1^2} \stackrel{\text{o.B.}}{=} -4 \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right) < 0 \quad \checkmark$$

• Umschreibung: mit $n_i = -\frac{U_i}{2mb}$

$$(4.23) \rightarrow \boxed{\frac{\partial \ln g_1}{\partial U_1} = \frac{\partial \ln g_2}{\partial U_2}} \quad (4.25)$$

vgl. therm. gekoppelte Systeme (Kap. 2.5)

$$\frac{\partial S^{(1)}}{\partial U^{(1)}} = \frac{\partial S^{(2)}}{\partial U^{(2)}} \leftrightarrow \frac{1}{T^{(1)}} = \frac{1}{T^{(2)}}$$

→ Identifikation: $S^{(i)} \sim \ln g_i$?!

b) Stärke des Maximums: bei \hat{n}_1, \hat{n}_2 (s.Gl. (4.24))

4.5 Thermisches GG und Entropie

a) Grundpostulat der stat. Mechanik:

- allgemeiner Fall: 2 bel. Systeme im therm. Kontakt ($i=1,2$)

(i) Zahl der Zustände bei Energie U_i : $g_i(U_i, N_i, \dots)$

(ii) Entropiefkt. für Gesamtsystem:

$$g(U, N) = \sum_{U_1+U_2=U} g_1(U_1, N_1) g_2(U_2, N_2) \quad (4.34)$$

(iii) extreme Summe/häufigster Zustand:

$$\begin{aligned} d(g_1 g_2) &= dg_1 g_2 + g_1 dg_2 \\ &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial U_1} \right)_{N_1} g_2 dU_1 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial U_2} \right)_{N_2} g_1 dU_2 = 0 \quad (4.35) \end{aligned}$$

Nebesatz: $dU_1 + dU_2 = 0$

→ therm. GG.-Bedingung:

$$\frac{1}{g_1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial U_1} \right)_{N_1} = \frac{1}{g_2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial U_2} \right)_{N_2} \quad (4.36)$$

$$\rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial \ln g_1}{\partial U_1} \right)_{N_1} = \left(\frac{\partial \ln g_2}{\partial U_2} \right)_{N_2}} \quad (4.37)$$

- Vergleich mit Kap. 2.5 → Motivation des Grundpostulat der stat. Mechanik (von Boltzmann) = mikroskop. Definition der Entropie

$$S(U, N) = k_B \ln g(U, N) \quad (4.38)$$

mit $g(U, N)$... Zahl der erreichbaren Zustände, welche bei vorgegebenen Makrowerten U, N zugänglich sind.

Boltzmannsche Konstante: $k_B = \frac{R}{L}$... durch Herleitung der idealen Gasgleichung in Stat. Mechanik

b) mikroskop. Erklärung der Entropiezunahme: Postulat II

- erreichbare Zustände: für 2 Systeme vor therm. Kontakt $(g_1 g_2)_{\text{ang}} = g_1(U_1^0, N_1) g_2(U_2^0, N_2) \quad U = U_1^0 + U_2^0 \quad (4.39)$

in der Regel: $(g_1 g_2)_{\text{avg}} \lllll (g_1 g_2)_{\text{max}}$

nach therm. Kontakt:

$$(g_1 g_2)_{\text{max}} = g_1(\hat{U}_1, N_1) g_2(\hat{U}_2, N_2) \quad (4.40)$$

mit minimaler relat. Fluktuation: $\frac{\Delta U_1}{U} = \frac{U_2 - \hat{U}_1}{U} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$

⇒ Entropiezunahme beim Lösen von Zwangsbed.
 = gewaltige Zunahme der möggl. Zustände
 = Maximiere von $S = k_B \ln g$

• thermodynam. Limes: Sattelpkt. Integration! (Kardar) (4.41)

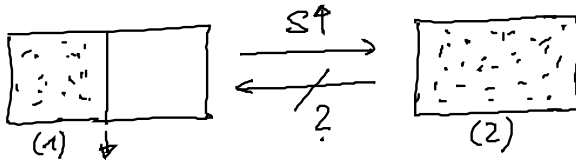
$$S = k_B \ln g(U, N) \xrightarrow{(4.33)} S = k_B \ln (g_1 g_2)_{\text{max}}$$

$$= k_B \ln g_1(\hat{U}_1, N_1) + k_B \ln g_2(\hat{U}_2, N_2)$$

$$= S_1(\hat{U}_1, N) + S_2(\hat{U}_2, N_2)$$

Bem: (1) System wird durch die wahrscheinlichste Konfig. beschrieben
 (2) S ist additiv in den Teilsystemen! (Kap. 1.5, Post. III)

• irreversible Vorgänge:



? (1) Nach Newton erlaubt (Zeitumkehrinvarianz von $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), t \rightarrow -t$)
 aber höchst unwahrscheinlich: $g(1) \lllll g(2)$

(2) Poincaré'scher Wiederkehransatz:

„Jedes noch so große endliche System nimmt nach der Wiederkehrzeit τ seinen Ausgangszustand in periodische Abständen wieder ein“

Boltzmann: $\tau \gggggggg 1s$

[Schwabl]: Abschätzung: $\tau \gg$ Erdzeitalter $\approx N = 10^{23}$