Frage: Wie behandelt man Systeme, in denen die Korrelationslänge sehr groß wird?

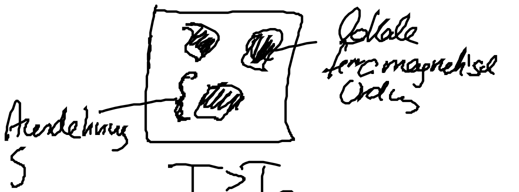
Bemerkungen zur Renormierungsgruppentheorie

siehe z.B. Buch von Schwabl, Brenig, Plischke-Bergersen

Grundideen

- Nahe am kritischen Punkt ist die Korrelationslänge ξ sehr groß und sie wird zur einzigen relevanten Längenskala

  Sie bestimmt z.B. die Größe ferromagnetisch geordneter Domänen für $T \gtrsim T_C$



$T > T_C$

Gesamtmagnetisierung $M = 0$
$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1} \langle S_i \rangle = 0$

Große Gebiete, in denen lokale Magnetisierung $\neq 0$!

- dicht unterhalb T_C ist ξ immer noch sehr groß, da nicht alle Spins geordnet sind (aber $M = \frac{1}{N} \sum \langle S_i \rangle \neq 0$)

- Direkt am kritischen Punkt divergiert ξ

  $\Rightarrow$ dort ~~es~~ gibt es gar keine charakterist. Längenskala mehr

$\Longrightarrow$ Eine "Skalentransformation" der Art
Länge $\to$ Länge $\cdot\, l$ sollte das System reproduzieren!
(Selbstähnlichkeit)

Eine solche Transformation heißt Renormierungsgruppentransf. (RG)

(der Name "RG-Gruppe" kommt von der Tatsache, dass zwei aufeinanderfolgende RG-Transf. wieder eine RG-Transf. darstellen)

<u>Zur konkreten Vorgehensweise:</u>

- Da mikroskop. Details (Ursprung und Form des Wechselwirkungspotentials) in der Nähe des krit. Punktes irrelevant werden.

$\Longrightarrow$ Eliminierung „kurzwelliger Fluktuationen" (d.h. großer $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)
(Freiheitsgrade auf kurzer Längenskala)

<u>2 Arten:</u>

- entweder im Ortsraum
  partielle Spurbildung, z.B. Ausführen der Spur in der Zustandssumme für jeden 2. Spin
  (Blockspintransformation) siehe z.B. Ising-Modell in 1d oder 2d

- oder im Fourierraum
  (Spur über Freiheitsgrade bei großem k)
  Grundlage: Ginzburg-Landau-Funktional

– In beiden Fällen:
Das "Ausspuren" führt auf einen neuen, effektiven Hamiltonian mit einer effektiven Kopplungsstärke

$$\left(e^{-\beta H_{eff}} = \underset{(\text{partiell})}{\mathrm{Tr}}\, e^{-\beta H_{original}} \right)$$

– Man untersucht „Flussverhalten" bei Iteration der RG-Transformation

– Die sukzessiv iterierten Kopplungsstärken haben (idealerweise) einen Fixpunkt: Eine weitere RG-Transf. ändert dann nichts mehr!

~~Diese~~ Die Eigenschaften in der Nähe des Fixpunkts hängen ab von

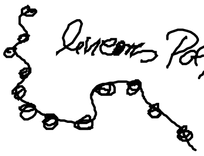
– Symmetrien des Ordnungsparameters
– Raumdimension
– Reichweite der Wechselwirkung

⇒ Prinzip der Universalität! → krit. Exponenten

Anwendung von Renormierungsgruppentheorien

– überall dort, wo Skaleninvarianz eine Rolle spielt!

- Phasenübergänge 2. Ordnung
- Physik von Makromolekülen (Polymere)



lineares Polymer ("Kettenlänge" N)

Zahl der Atome (Monomere)

z.B.

$$\langle R^2 \rangle \sim N^{2\nu}$$

mittlere quadrat. Abstand der Kettenenden

$$\bar{R} = \sqrt{\langle R^2 \rangle} \sim N^{\nu}$$

Fasse zwei Monomere zusammen

$$\bar{R} \sim \left(\frac{N}{2}\right)^{\nu}$$

Fasse λ Monomere zusammen: $\bar{R} \sim \left(\frac{N}{\lambda}\right)^{\nu}$

- Selbstorganisierte kritische Systeme (Systeme, die sich von selber einem krit. Punkt nähern):

  Erdbeben, Lawinen, Waldbrand

- Teilchenphysik, Quantenfeldtheorie

IV. Theorie der linearen Antwort

Problemstellung:

Betrachte System, welches durch eine äußere Störung (z.B. durch ein Feld $V(\underline{r}, t)$) aus dem Gleichgewicht gebracht wurde

Frage: Wie ist die "Antwort" des Systems in dem Fall, dass die Störung klein ist?

Annahme:

In diesem Fall (kleine Störung) ist die Antwort B des System linear in der Störung, also von der Form

$$(*) \quad B = \chi V$$

(wobei B hier schon eine gemittelte Größe ist!)

Beispiele:

$$\underbrace{P}_{\text{Polarisation}} = \underbrace{\chi_{el}}_{\text{elektrische Suszeptibilität}} \underbrace{E}_{\text{elektr. Feld}} \quad , \text{analog: } \underbrace{M}_{\text{Magnetisierung}} = \chi_{mag} \underbrace{B}_{\text{magnet. Feld}}$$

$$\underbrace{j}_{\text{Stromdichte}} = \underbrace{\sigma}_{\text{Leitfähigkeit}} \underbrace{E}_{\text{elektr. Feld}}$$

$$\underbrace{\tau}_{\text{Scherstress}} = \underbrace{\eta}_{\text{Viskosität}} \underbrace{\dot{\gamma}}_{\text{Scherrate}}$$

Verallgemeinerung von $(*)$

$$\underbrace{B(\underline{r},t)}_{\text{Antwort}} = \int d\underline{r}' \int_{-\infty}^{t} dt' \underbrace{\chi(\underline{r}-\underline{r}', t-t')}_{\text{orts- und zeitabhängige Suszeptibilität!}} \underbrace{V(\underline{r}',t')}_{\text{Störung}}$$

– nur Vorgänge aus der Vergangenheit spielen eine Rolle

"Kausalitätsprinzip"

Kernaussage der Lineare-Antwort-Theorie

Die Suszeptibilität (Antwortfunktion) χ kann berechnet werden auf Basis des Gleichgewichtssystems ($V=0$)

Konkreter: χ ist proportional zu Fluktuationen des Systems im Gleichgewicht !!

Inhalt des „Fluktuations-Dissipationstheorems"

(H. Callen, T. Welton, Phys. Rev. 83, 34 (1951))

bereits um 1930:

⇒ Regressionshypothese von L. Onsager

„Relaxationsverhalten eines Systems in das Gleichgewicht entspricht den Fluktuation im Gleichgewicht"

Literatur:

quantenmechan. Formalismus

G. Röpke: Nonequilibrium Statistical Physics

Buch von Chaikin, Lubensky: Principles of Condensed Matter Physics

klass. Systeme: ⟹ Hansen, McDonald z.B. „Theory of simple liquids"

IV.1. Formalismus (klass.)

Hamiltonian des Systems im externen Feld

$$H = \underbrace{H_0}_{\substack{\text{System} \\ \text{im Gleichgewicht} \\ \text{(ohne Störung)}}} + \underbrace{H'(t)}_{\text{Störung}} = H(\Gamma, t) \quad \text{mit } \Gamma = (\{q\}, \{p\})$$

explizit Zeitabhängig

$$\text{mit } H'(t) = -\int d\underline{r}\, A(\underline{r})\, \underbrace{V(\underline{r}, t)}$$

Dabei A die "zu V konjugierte" Observable

Annahme:
A hängt nur implizit von der Zeit ab über die Dynamik der Koordinaten!

Setze hier:

(period. Störung)

$$V(\underline{r}, t) = \frac{1}{\mathcal{V}} V_{\underline{k}}\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)} \quad \text{mit } \mathcal{V} \text{ Volumen}$$

(Hintergrund: Jede Störung kann in Fouriermoden entwickelt werden, betrachte hier nur eine Mode mit festem $\underline{k}$)

Einsetzen:

$$H'(t) = -\int d\underline{r} \underbrace{\int d\underline{k}' A_{\underline{k}'} e^{i\underline{k}'\cdot\underline{r}}}_{A(\underline{r})} \frac{1}{V} V_{\underline{k}} e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

benutze: $\frac{1}{V}\int d\underline{r}\, e^{i(\underline{k}'+\underline{k})\cdot\underline{r}} = \delta(\underline{k}'+\underline{k})$

$$\Rightarrow H'(t) = -A_{-\underline{k}} V_{\underline{k}} e^{-i\omega t} = H'_{\underline{k}}(t)$$

Nehme der Einfachheit halber an, dass $V(\underline{r},t)$ räuml. homogen $\Rightarrow V_{\underline{k}} \neq 0$ für $\underline{k}=0$

$$\Rightarrow H'(t) = -A\, V(t) \quad \text{mit } V(t) = V_0 e^{-i\omega t}$$

Weitere Annahme:

Das System war für $t \Rightarrow -\infty$ im Gleichgewicht,
d.h. $\lim_{t\to-\infty} V(t) = 0$

schreibe für die Störung:

$$V(t) = V_0 e^{-i(\omega+i\varepsilon)t}$$

mit $\varepsilon > 0$ und reell

Damit $\lim_{t\to-\infty} V(t) = 0$

Der Limes $\varepsilon \to 0$ wird am Ende gezogen

Beachte:

Wir sind interessiert an der "Antwort". Diese stellt immer einen Mittelwert dar!

$\Rightarrow$ Ensemble-Mittelwert über eine ~~beliebige~~ Phasenraumdichte $\rho(\Gamma, t)$

Erinnerung:

betrachte beliebige Phasenraumdichte $\rho(\Gamma,t)$

Bewegungsgleichung: $$\frac{\partial \rho(\Gamma,t)}{\partial t} = -i\mathcal{L}\rho(\Gamma,t)$$

Liouville-Gl.

Poisson-Klammer

mit $\mathcal{L}\ldots = i\{H,\ldots\}$

Liouville-Operator

Formale Lösung: $$\rho(\Gamma,t) = e^{-i\mathcal{L}t}\underbrace{\rho(\Gamma,t=0)}_{\rho(\Gamma,0)}$$

Dynamik von Observablen:

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\} = i\mathcal{L}G$$, formale Lösung $G(t) = e^{i\mathcal{L}t}G(0)$

totale ~~zeitl.~~ Ableitung!

falls G nicht explizit zeitabhängig