Perkolationstheorie II

Erkenntnisse zu Perkolation bisher:

– Geometrischer Phasenübergang aus Zufallsprozess (als Modell für 'random media'), getrieben durch Besetzungswahrscheinlichkeit/-konzentration eines Gitters ('bond', 'site') oder eines Raums (einer Fläche (Kontinuumsperkolation)

– Interessante Größen, die Perkolationsübergang charakterisieren, weisen Skalenverhalten mit krit. Exponenten auf:

- Stärke Θ des ∞ Clusters ist Ordnungsparameter

$$\Theta \sim (p - p_c)^{\beta} \qquad (\text{vgl. spontane Magnetis. } m \sim (T_c - T)^{\beta})$$

p_c: Perkolationsschwelle

(p_c hängt von Gittertyp / Perkol.-modell ab, aber krit. Expon. nur von Raumdimension) $\rightarrow$ Universalität

- Mittlere Clustergröße S (Stärke) (endl. Cluster):

$$S \sim |p - p_c|^{-\gamma}$$ divergiert bei Annäherung an p_c (von oben u. unten)

- Korr.-fkt. $\hat{=}$ Wahrsch., dass zwei Plätze mit Abstand r zum selben Cluster gehören, w_r, fällt bei p_c nicht mehr exponentiell ab, sondern algebraisch ('power law'), da Korrelationslänge ξ divergiert:

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu} \qquad (\nu = 1 \text{ für } d = 1)$$

- Clustergrößenverteilung (endl. Cluster)

$n_s(p_c) \sim s^{-\tau}$ statt expon. Zerfall mit s für $p < p_c$

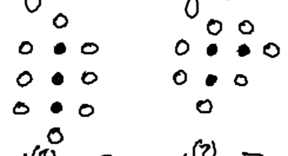
- Perkolierender Cluster ist selbstähnlich (fraktal), d.h. Stärke Θ skaliert mit linearer Abmessung L

$$\Theta \sim L^{d_f}, \quad d_f < d$$

Zum Abzählungsproblem für n_s auf „gewöhnlichen" Gittern mit $d>1$:

Essentiell für Bestimmung von n_s war die Zahl t_s der begrenzenden leeren Plätze eines s-Clusters (z.B. $t_s=2$ $\forall s$ in $d=1$).
In $d>1$ hängt t_s nicht nur von s ab, sondern auch von Form/Kompaktheit der Realisierung ab:

$s=3$ auf Quadratgitter:



$t_3^{(1)}=8 \quad t_3^{(2)}=7$

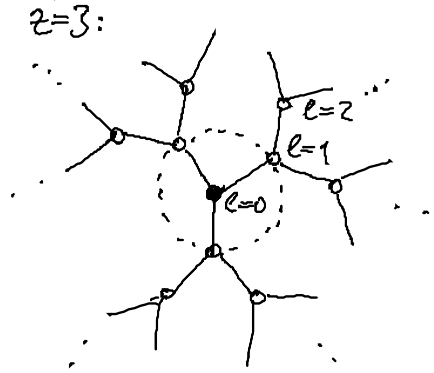
Für größere s außerdem 'Loops' möglich

→ Alle Clusterkonfig. C_s mit s Plätzen („Gittertiere") müssen inklusive ihres statist. Gewichts und t_{C_s} bestimmt und separat behandelt werden. → Interessantes Regime großer s praktisch nicht zugänglich.

11.6 Bethe-Gitter / Cayley tree

Jeder Platz hat z nächste Nachbarn, Baumstruktur: keine geschlossenen Wege

$z=3$:



l-te Schale hat $S_l = z(z-1)^{l-1}$ Plätze,
l Schalen haben

$$V_l = 1 + z\sum_{m=0}^{l-1}(z-1)^m = \dots \text{ (geom. Reihe)} = \frac{2-z(z-1)^l}{2-z}$$

→ S_l, V_l wachsen exponentiell mit l!

⇒ „Oberfläche"/„Volumen" $S_l/V_l = \dfrac{2-z}{\frac{2}{z(z-1)^{l-1}}+1-z} \xrightarrow[l\to\infty]{(z\geq 3)} \dfrac{z-2}{z-1}$

(z.B. $z=3$: Hälfte d. Plätze in S_l für $l\to\infty$)

Zum Vgl.:
Für d-dim. Kugel $S_d \sim R^{d-1}$, $V_d \sim R^d \Rightarrow S_d \sim V_d^{1-1/d}$

Proportionalität $S_d \sim V_d$ für $R \to \infty$ wird nur für $d \to \infty$ erreicht.

Daher wird Bethe-Gitter auch für Spin-Modelle oft als „Ersatz" für „∞-dim. Gitter" verwendet. (Erinnerung: z.B. für Ising-Modell mit ∞ langreichw. WW: Mean-Field-Näherung wird exakt.)

Perkolation auf Bethe-Gitter:

i) Perkol.-schwelle p_c aus Korr.-fkt. ω_r (W., dass z.B. Zentrum mit Platz in r-ter Schale verbunden ist):

$$\omega_r = p^r \underbrace{z(z-1)^{r-1}}_{\#\text{Plätze } r\text{-te Schale}}$$

$$= \frac{z}{z-1}\left(p(z-1)\right)^r$$

$$= \frac{z}{z-1} e^{r \ln (p(z-1))}$$

$\Rightarrow$ Korr.-länge $\xi = \frac{-1}{\ln(p(z-1))}$ divergiert für

$p \to p_c = \frac{1}{z-1}$ (Erinn.: $p_c = 1$ für $z=2 \hat{=} 1d$ Kette)

wieder krit. Expon. $\nu = 1$

ii) Stärke Θ des ∞ Clusters:

Wahrsch., dass Zentrum besetzt ist und zum ∞ Cluster gehört, ist $p\,\Theta \hat{=}$ Wahrsch., dass es besetzte Verbindung bis zu $r \to \infty$ gibt (zu S_∞)

Q Wahrsch., dass es von (besetztem) Platz keine Verbindung nach S_∞ gibt:

$$Q = \underbrace{1-p}_{\text{nächster Platz ist selbst nicht besetzt}} + p\, Q^{z-1}$$

keiner der $(z-1)$ Zweige hat Verbind. nach S_∞

Lsg. für $z=3$: $Q_a = 1$ (für $p < p_c$)

und $Q_b = \frac{1-p}{p}$

Zurück zu Θ:

Wahrsch., dass Zentrum besetzt, aber ohne Verbindung zu S_r, $r \to \infty$, ist, ist $p(1-\Theta)$, andererseits auch pQ^z:

$\Theta = 1 - Q^z$

Wieder für $z=3$: $\Theta_a = 0$ $(p<p_c)$

$$\Theta_b = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^3$$

$\Rightarrow$ (ohne Herleit.) $\Theta \sim (p-p_c)$ $(\beta = 1)$

$(p_c = 1/2)$

iii) Clustergrößenverteilung:

t_s, Zahl d. leeren Nachbarplätze, hängt für Bethe-Gitter nur von s ab, nicht von Topologie d. s-Clusters, also:

$t_1 = z$, $t_2 = 2(z-1)$ (Endplätze haben $z-1$ N., Mittelplätze auf lin. Cluster $z-2$)

$$t_s = 2(z-1) + (s-2)(z-2)$$
$$= 2 + s(z-2)$$

Daraus n_s:

$$\underset{(p)}{n_s} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{statist. Gewicht } s\text{-Cluster}}}{g_s}(1-p)^{t_s} p^s = g_s (1-p)^2 (1-p)^{s(z-2)} p^s$$

Um Berechnung von g_s zu umgehen, bilden wir

$$\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} \underset{z=3}{=} \left(\frac{1-p}{1-p_c}\right)^2 \left[\frac{p(1-p)}{p_c(1-p_c)}\right]^s \quad \left(\text{Voraussetzung: } n_s(p_c) \sim s^{-\tau}\right)$$

$$= \left(\frac{1-p}{1-p_c}\right)^2 \left[1 - a(p-p_c)^2\right]^s$$

$\sim e^{-cs}$ mit $a=4$,

$c = -\ln\{1-a(p-p_c)^2\}$

$\Rightarrow$ Exponent. Zerfall $\forall s$, nicht nur für große s wie bei „gewöhnlichen" Gittern

$\Rightarrow$ Skalenfkt., da

$cs \sim s(p-p_c)^2$ hängt nur ab von „skalierter" Clustergröße

$s(p-p_c)^{1/\sigma}$, hier $\sigma = 1/2$

$\rightarrow$ „Selbstähnlichkeit" d. Clustergrößenverteil.

Mit $n_s(p_c) \sim s^{-\tau}$

kann man über die mittlere Clustergröße S zeigen:

$S \sim c^{\tau-3} = (p-p_c)^{\frac{\tau-3}{\sigma}}$ Skalenrelation

$\sim |p-p_c|^{-\gamma}$ (früher) $\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{3-\tau}{\sigma}}$

Analog aus Θ und

$1 = 1-p+\sum_s{}' m_s + p\Theta \rightsquigarrow \Theta = 1-\frac{1}{p}\sum_s{}' m_s$,

$\Theta \sim (p-p_c)^{\beta} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\tau-2}{\sigma}}$