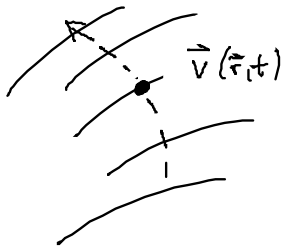


4.1. Klassischer Zugang



behandeln homogenes Elektronengas
und Dichte n_e^0 im Fluiddgewicht ($n_e^0 = \frac{N}{V}$)

↓ Ladungsdichte $\rho_{el}^0 = -e n_e^0$

Stromdichte $\vec{j}_{el}^0 = 0$

diskutieren klein Störung $\delta \rho_{el}(\vec{r}, t)$: $\rho_{el}(\vec{r}, t) = \rho_{el}^0 + \delta \rho_{el}(\vec{r}, t)$

Induziert \vec{j}_{el} weglassen

$$\vec{j}_{el}(\vec{r}, t) = \underbrace{\vec{j}_{el}^0}_{=0} + \delta \vec{j}_{el}(\vec{r}, t)$$

Stromdefinition :

geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$ durch Bewegung Teilladungsdichte

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \hat{=} \text{Ladung} \cdot \text{geschwindigkeit}$$

$$\delta \vec{j} = (-e n_e^0 + \delta \rho) (\underbrace{\vec{v}^0}_0 + \delta \vec{v}) \approx \underline{-e n_e^0 \delta \vec{v}} + \text{Korrekturen}$$

Newtongleichung: $\partial_t (m \delta \vec{v}) = -e \vec{E}$ (Lorentzkraft) | $\cdot \underline{-e n_e^0 / m}$

$$\partial_t \vec{j} = \partial_t \delta \vec{j} = \frac{e^2}{m} n_e^0 \vec{E} \quad | \quad \vec{\nabla} \cdot$$

$$\partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{e^2}{m} n_e^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{e^2}{m} n_e^0 \frac{\rho_{el}^0 + \rho_{el}^{\text{ind}} + \delta \rho}{\epsilon_0}$$

Quelle gl. d. \vec{E} -Felds ↑

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= \\ -\partial_t \delta \rho & \end{aligned} \right\} \text{(Kontinuität)}$$

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} = -\frac{e^2}{m \epsilon_0} n_0 \delta \rho \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} = -\Omega_{pe}^2 \delta \rho}$$

↓ Klein Ändy d. Ladungsdichte führt zu Schwingung des gesamten Elektronengases mit der Plasmafrequenz $\Omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2}{m \epsilon_0} n_0}$, die kollektive Anreg. wird Plasmon genannt.

4.2. Ansatz mech. Quantisierung

Elektronendicht wellen bestimmt durch Dispersionsrelation: $\omega = \omega(\vec{Q})$
↑ Wellenzahl

$$\rho_{el}(\vec{r}, t) = -e \sum_{s, k_1, k_2} \varphi_{k_1}^*(\vec{r}) \varphi_{k_2}(\vec{r}) a_{k_1, s}^\dagger(t) a_{k_2, s}(t)$$

(siehe VL. 2. Quantisierung)

$$= -e \sum_{s, k_1, k_2} \underbrace{\frac{e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} \frac{e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}}}_{\frac{1}{V} e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}}} a_{k_1, s}^\dagger(t) a_{k_2, s}(t)$$

Wähle: $\vec{Q} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$
 $\vec{k} = \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2}$

$$\langle \rho_{el}(\vec{r}, t) \rangle = -\frac{e}{V} \sum_{\vec{Q}} \sum_{k, s} \langle a_{\vec{k}-\vec{Q}, s}^\dagger(t) a_{\vec{k}+\vec{Q}, s}(t) \rangle e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} \quad \vec{k} \rightarrow \vec{k} - \frac{\vec{Q}}{2}$$

$$= -\frac{e}{V} \sum_{\vec{Q}} e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} \sum_{k, s} \langle a_{\vec{k}-\vec{Q}, s}^\dagger(t) a_{k, s}(t) \rangle$$

$$= -e \frac{1}{V} \sum_{\vec{Q}} e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} \langle \rho_{\vec{Q}}(t) \rangle$$

Fourierkomponente der Ladungsdichte:
 $\langle \rho_{\vec{q}}(\omega) \rangle \Rightarrow \omega = \omega(\vec{q})$

Suche jetzt Bewegungsgleichung f. Fourierkomponente:

$$\langle \rho_{\vec{q}} \rangle = -\frac{e}{V} \sum_{\vec{r}} \int d\omega \rho_{\vec{q}}(\omega) e^{-i\omega t + i\vec{q} \cdot \vec{r}} \quad \text{mit } \omega = \omega(\vec{q})$$

Hiermit Bewegungsgleichung f. $\rho_{\vec{q}} = ?$

$$-i\hbar \partial_t \underline{A} = [H, \underline{A}], \quad \text{d.h. } \underline{A} \text{ w\"{a}hle als } a_{k-QS}^{\dagger} a_{kS}$$

4.3. Bewegungsgleichung f. Ladungsdichte und Hierarchyproblem

$$H = H_0 + V_{\text{Coul}} \quad \text{f. Elektronen}$$

jetzt wir als Bsp. f. $H_0, V_{\text{Coul}} \rightarrow$ selbst

$$-i\hbar \partial_t \underline{A} \Big|_{H_0} = [H_0, \underline{A}] \quad \underline{A} = a_{k-QS}^{\dagger} a_{kS}$$

$$\left[\sum_{k's'} \varepsilon_{k's'} a_{k's'}^{\dagger} a_{k's'}, a_{k-QS}^{\dagger} a_{kS} \right] =$$

$$\sum_{k's'} \varepsilon_{k's'} \left(\overbrace{a_{k's'}^{\dagger} a_{k's'}}^{\dagger} \underbrace{a_{k-QS}^{\dagger} a_{kS}} - a_{k-QS}^{\dagger} a_{kS} \overbrace{a_{k's'}^{\dagger} a_{k's'}} \right)$$

Idee: 1. Term da lange ordnen bis der 2. Term entsteht

$$= \sum_{k's'} \varepsilon_{k's'} \left(a_{k's'}^+ \left[\delta_{k',k-Q} \delta_{s's'} - a_{k-Q,s}^+ a_{k's'} \right] a_{k,s} - \dots \right)$$

$$\varepsilon_{k-Q,s} a_{k-Q,s}^+ a_{k,s} - \sum_{k's'} \varepsilon_{k's'} a_{k-Q,s}^+ \left(\delta_{k,k'} \delta_{s,s'} - a_{k,s}^+ a_{k's'} \right) a_{k's'}^+ \dots$$

$$= (\varepsilon_{k-Q,s} - \varepsilon_{k,s}) a_{k-Q,s}^+ a_{k,s}$$

Übergangsamplitude f. $k \rightarrow k-Q$ und Übergangsenergie $\varepsilon_{k-Q,s} - \varepsilon_{k,s}$

analyse Reduz. f. Coulomb-WG

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} = [V_{\text{Coul}}, \underline{A}] \text{ mit } \underline{A} = a_{k-Q,s}^+ a_{k,s}, \text{ oder Reduz. } (\hat{U} \underline{A})$$

$$[V_{\text{Coul}}, a_{k-Q,s}^+ a_{k,s}] = \sum_{p,q,\lambda} V_q \left(a_{k-Q+q,s}^+ a_{p-q,\lambda}^+ a_{p,\lambda} a_{k,s} + a_{k-Q,s}^+ a_{p-q,\lambda}^+ a_{k-q,s} a_{p,\lambda} \right)$$

Problem: die große $a_{k-Q,s}^+ a_{k,s}$ koppelt an 4-Operatoren

$$\langle 2 \rangle \sim \{ \langle 2 \rangle, \langle 4 \rangle \}$$

offensichtlich existiert ein Hierarchieproblem:

Kopplg an höhere Erwartungswerte!

einfachste Lösung ist eine Faktorisierung der ELW

in der Hartree-Fock Näherung mit Regel (ÜA):

$$\langle a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \rangle = \langle a_1^+ a_4 \rangle \langle a_2^+ a_3 \rangle - \langle a_1^+ a_3 \rangle \langle a_2^+ a_4 \rangle$$

↑
(k_1, s_1)

nicht exakt, sondern Effektivtheorie f. 1-Teilchen in Feld aller anderen

4.4. Hartree-Fock Näherung f. die Elektronengasbewegung

- a) Zerlegung der 4-er Erwartungswerte von $[a_{k=0s}^\dagger a_{ks}, V_{\text{Coul}}]$ (erlaubt ist)
- b) reduziere die Anzahl der $\langle 2 \rangle$ er Terme zusätzlich, indem wir uns reduzieren von Dichten $\langle a_{ks}^\dagger a_{ks} \rangle$ und Übergängen $\langle a_{k=0s}^\dagger a_{ks} \rangle$
- d.h. alle andere Indexkombinationen weglassen durch Bildz. u. Kronechersymbole
- z.B. $\langle a_{ks}^\dagger a_{ks'} \rangle = \langle a_{ks}^\dagger a_{ks} \rangle \delta_{ss'}$ (Spinkohärenz $\rightarrow 0$)
- (a+b) \Downarrow mit $\sigma_{k_1 k_2}^{\uparrow \downarrow} \equiv \langle a_{k_1 s_1}^\dagger a_{k_2 s_2} \rangle$

$$\begin{aligned}
 -i\hbar \partial_t \sigma_{k-Qk}^{ss} &= (\epsilon_{k-Qs} - \epsilon_{ks}) \sigma_{k-Qk}^{ss} && \text{freie Bewegg. aufgrund kinet. Energie} \\
 + \sum_{q s'} V_q \left(\underbrace{\sigma_{k-q, k-q}^{s's'}}_{\delta \epsilon_{ks}} - \underbrace{\sigma_{k-Q+q, k-Q+q}^{s's'}}_{\delta \epsilon_{k-Qs}} \right) \sigma_{k-Qk}^{ss} &&& \text{Wechselwirkungsterm: Energieerhaltung, das kinetische Energie} \\
 + V_Q \left(\sigma_{kk}^{ss} - \sigma_{k-Q, k-Q}^{ss} \right) \sum_{sp} \sigma_{p-Qp}^{s's'} &&& \text{Wechselwirkungsterm: band internes Feld aller Übergänge auf}
 \end{aligned}$$

Coulomb WW führt zu Energieabsenkung über parallele Spins
 und zu inter. Feldkorrektur: alle Übergänge beeinflussen sich
 wechselseitig.

4.5. Dispersionsrelation f. Elektronengas

Fourierentwicklung des Bewegungsgleichungen

$-it_t \partial_t \rightarrow -it_t (-i\omega) = -t\omega$ in Heisenberggl. einsetzen

$$\left(t\omega + \tilde{\epsilon}_{k-Q, s} - \tilde{\epsilon}_{k, s} \right) \tilde{\sigma}_{k-Q, k}^{ss}(\omega) =$$

$$-V_Q \left(\tilde{\sigma}_{kk}^{ss} - \tilde{\sigma}_{k-Q, k-Q}^{ss} \right) \sum_{s'p} \tilde{\sigma}_{p-Q, p}^{s's'}(\omega) \quad \downarrow$$

$$\downarrow \quad \tilde{\sigma}_{k-Q, k}^{ss} = -V_Q \frac{\tilde{\sigma}_{kk}^{ss} - \tilde{\sigma}_{k-Q, k-Q}^{ss}}{t\omega + \tilde{\epsilon}_{k-Q, s} - \tilde{\epsilon}_{k, s}} \sum_{s'p} \tilde{\sigma}_{p-Q, p}^{s's'}$$

gemittelt $\omega = \omega(\vec{Q})$

fehlt: $\sum_{s, k} 1$, dann Kürze von $\sum_{s, p} \tilde{\sigma}_{p-Q, p}^{ss}$ und $\sum_{s'p} \tilde{\sigma}_{p-Q, p}^{s's'}$

man erhält

$$1 = V_Q \sum_{k, s} \frac{\tilde{\sigma}_{k-Q}^s - \tilde{\sigma}_k^s}{t\omega(\vec{Q}) + (\tilde{\epsilon}_{k-Q, s} - \tilde{\epsilon}_{k, s})}$$

Dispersion relation d. Elektronengases „Plasmodispersion“

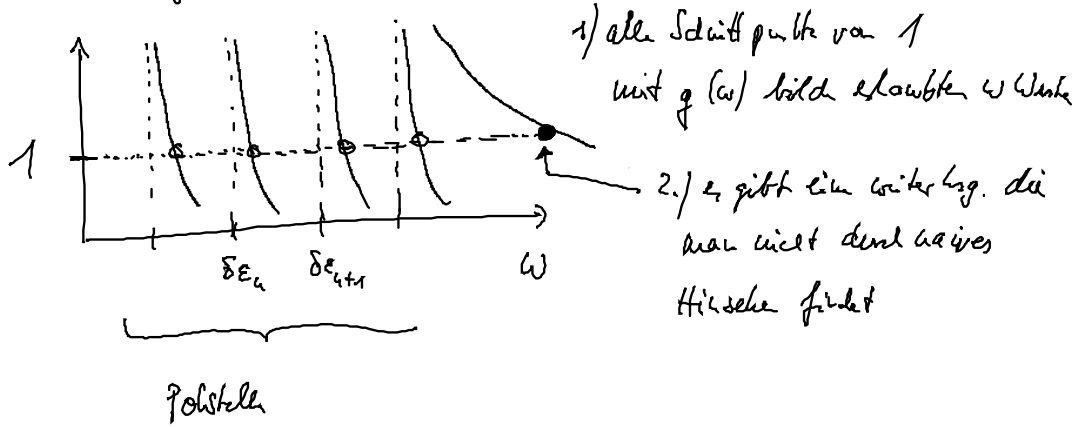
Bemerkungen:

a) $\omega = \omega(\vec{Q})$ ist Dispersion und beschreibt wellenartige Bewegung d. Elektronengases $e^{-i\omega(\vec{Q})t + i\vec{Q}\cdot\vec{r}}$

b) mögl. Anregungen sind von Besetzungszahl abhängig $(\tilde{\sigma}_k^s, \tilde{\sigma}_{k-Q}^s)$, $\omega(\vec{Q})$ ist implizit \rightarrow Arbeit

c) graphische Diskussi. ist möglich

$$1 = g(\omega), \quad \vec{Q} = \text{fest}$$



↓ 3 verschied. Lösung:

a) „Freitrichresonanz“
verbund mit Eitrichübergang
 $\tilde{\epsilon}_{k-a} \leftrightarrow \tilde{\epsilon}_k$
„Eitrichkontinuum“

b) „kollektive Resonanz“
ein relativ isolierter Zweig:
 $\omega_{pe}(\vec{Q}) = \omega_{pe} + \alpha Q^2$
„kollektive Plasmaschwing.“
(α -konstante)

4.6. Kollektive Plasmaschwing.

$$1 = \sum_{s, k} \frac{V_Q (\sigma_{k-a}^s - \sigma_k^s)}{i\omega(Q) + \tilde{\epsilon}_{k+a, s} - \tilde{\epsilon}_{k, s}}$$

Betrachte $\vec{Q} \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$) , klass. Grenzfall "

$$\tilde{\epsilon}_{k-Q} - \tilde{\epsilon}_k \approx t_1^2 \left(\frac{(\vec{k}-\vec{Q})^2}{2m} - \frac{k^2}{2m} \right) = \left(-\frac{2\vec{k} \cdot \vec{Q}}{2m} + \frac{Q^2}{2m} \right)$$

ohne Renormierung. klein

$$\sigma_{k-Q}^S - \sigma_k^S \approx f_{k-Q}^S - f_k^S \approx f_k^S - \vec{Q} \cdot \vec{\nabla}_k f_k^S - f_k^S$$

Fermi funktion in fg. Taylorrech in Q

weiterzu:

$$1 = V_Q \sum_{sk\alpha} \frac{-Q^\alpha \partial_k^\alpha f_k^S}{\hbar\omega - \frac{\hbar^2 \vec{Q} \cdot \vec{k}}{m}} \approx -\frac{V_Q}{\hbar\omega} \sum_{sk\alpha} Q^\alpha \partial_k^\alpha f_k^S \left(1 + \frac{\vec{Q} \cdot \vec{k}}{m\hbar\omega} \right)$$

Taylor in Q
korrektur Koppung von \vec{k}, \vec{Q} etc

erweitern, denn $\sum_k \rightarrow \int d^3k$ ist ein Integral über ungerade Funktion (Ableitg. der geraden Fermifkt)

$$1 = -\frac{V_Q}{\hbar\omega} \sum_{sk\alpha} Q^\alpha \partial_k^\alpha f_k^S \frac{\vec{Q} \cdot \vec{k}}{m\hbar\omega}$$

partielle Integration $\sum_k \rightarrow \int d^3k$

$$= \frac{V_Q}{m\hbar\omega} \sum_{sk\alpha} Q^\alpha f_k^S Q^\alpha = \frac{V_Q}{m\hbar\omega^2} Q^2 \sum_{ks} f_k^S$$

N

$$1 = \frac{e^2}{Q^2 V \epsilon_0} \frac{Q^2}{m\hbar\omega^2} N = \frac{e^2 \mu_0}{m\hbar\omega^2 \epsilon_0}$$

$$\boxed{\omega = \Omega_{pe}} \quad Q \rightarrow 0$$

hier etwas genauere Rechnung bis Q^2 zeigt die volle Dispersion

$$\boxed{\omega = \Omega_{pe} + \alpha Q^2}$$

