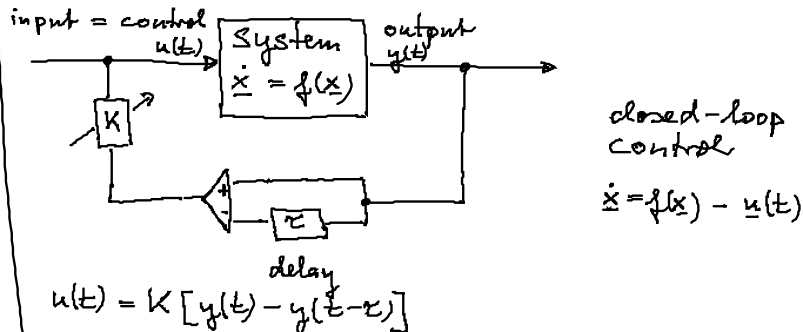


English Summary:

Time-delayed feedback control:



$$u(t) = K [y(t) - y(t-\tau)]$$

Pyragas (1992): chaos control (non-invasive)

2.2.1 Stabilisierung instabiler Fixpunkte durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Allg. Form eines 2-Var.-Systems (ohne Kontrolle)

Fixpt. \underline{x}^* : $0 = \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}^*) \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^2$

Linearisierung um \underline{x}^* für kleine Störungen:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}^* + \delta \underline{x}(t) :: \delta \dot{\underline{x}} = (Df)_{\underline{x}^*} \delta \underline{x}$$

Jacobi-Matrix $(Df)_{\underline{x}^*} \equiv A$

lös. $\delta \underline{x} \sim e^{\lambda t}$: $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

Normalform eines instab. Fokus $\Lambda = \lambda \pm i\omega$ ($\lambda > 0$)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

komplexe Schreibweise $\dot{z} = (\lambda \pm i\omega)z$, $z = x \mp iy \in \mathbb{C}$
mit zeitverzögerter Rückkopplung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

"diagonale Rückkopplung"

$$z = (\lambda \pm i\omega)z - K(z(t) - z(t-\tau))$$

Ansatz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim e^{\lambda t}$

char. gl. $0 = \det \left[\begin{pmatrix} \lambda - \Lambda & \omega \\ -\omega & \lambda - \Lambda \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} 1 - e^{-\Lambda\tau} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\Lambda\tau} \end{pmatrix} \right]$

$$= [\Lambda + K(1 - e^{-\Lambda\tau}) - \lambda]^2 + \omega^2$$

$$\Leftrightarrow [\dots]^2 = -\omega^2$$

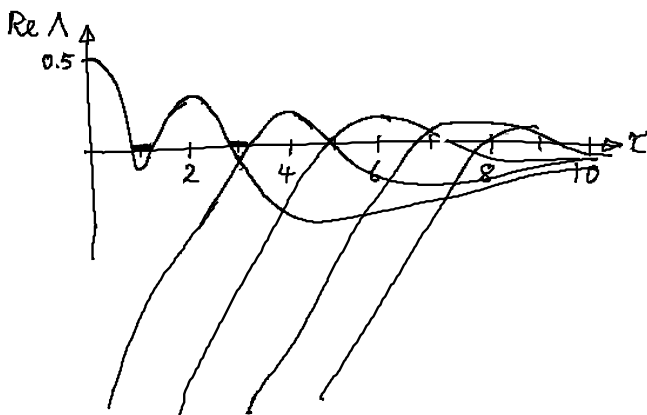
$$\Leftrightarrow \boxed{\Lambda + K(1 - e^{-\Lambda\tau}) = \lambda \pm i\omega}$$

Lösung durch Lambertfkt. $\underbrace{(\Lambda + K - (\lambda \pm i\omega))\tau}_{\tilde{z}} = K\tau e^{-\Lambda\tau}$

$$\tilde{z} e^{\tilde{z}} = K\tau e^{-(\lambda \pm i\omega)\tau + K\tau} \quad \begin{matrix} \tilde{z} e^{\tilde{z}} = y \\ \tilde{z} = W_2(y) \end{matrix}$$

$$\Lambda\tau = W_2(K\tau e^{-(\lambda \pm i\omega)\tau + K\tau}) + (\lambda \pm i\omega)\tau - K\tau$$

natürliche Zeitskala $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ (Osz. periode ohne Delay)



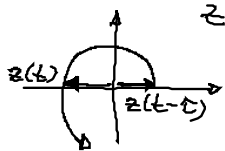
unkontrolliert:
Fixpt. instabil ($\lambda > 0$)
 $\lambda = 0.5, \omega = \pi, K = 0.3$
 \Downarrow
 $T_0 = 2$



kontrolliert:
Fixpt. stabil ($\lambda < 0$)
 $\lambda = -0.5, \omega = \pi, K = -0.3$

nichtmonotones Verhalten der Eigenmoden
 $\text{Re } \lambda$ als Fkt. von τ führt abwechselnd
 zur Stabilisierung / Destabilisierung

Stabilitätsunkehr bei $\tau \approx \frac{2n+1}{2} T_0$ ($n=0, 1, 2, \dots$)
 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2$



Stabilitätsgrenzen

char. gl. $\lambda + K(1 - e^{-\lambda\tau}) = \lambda \pm i\omega$

$\text{Re } \lambda = 0$:

char. gl. in Re und Im aufgespalten, mit $\lambda = p + iq$:

$$\begin{aligned} \lambda &= p + K[1 - e^{-p\tau} \cos q\tau] & \lambda > 0 \\ \omega &= q + K e^{-p\tau} \sin q\tau \end{aligned}$$

$\text{Re } \lambda = p \stackrel{!}{=} 0$: $\lambda = K(1 - \cos q\tau)$ (1)

$\omega = q + K \sin q\tau$ (2)

Systempar.: λ, ω geg.

Kontrollpar.: $K, \tau > 0$

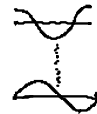
Kurvenpar. der Stab. grenze im (K, τ) -Raum : q

(1) $\Rightarrow 0 \leq 1 - \cos q\tau \leq 2 \Rightarrow \frac{\lambda}{K} \leq 2 \Rightarrow K \geq \frac{\lambda}{2}$

$K_{\min} = \frac{\lambda}{2}$ (1) $\Rightarrow \cos q\tau = -1 \Rightarrow q\tau = (2n+1)\pi$ (3)
 notwendige Bed. für Stabilisierung
 (minimale Rückkopplungsstärke)
 $n=0, 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \sin q\tau = 0$ (2) $\Rightarrow q = \omega$

$\Rightarrow \tau = \frac{\pi}{\omega} (2n+1) = T_0 \frac{2n+1}{2}$ $n=0, 1, 2, \dots$



Für $\tau = \frac{2\pi n}{\omega} = nT_0$ ist keine Stabilisierung möglich, weil

(2) $\Rightarrow q = \omega \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{K-1}{K} = \cos(q\tau) \underset{q\tau=2\pi n}{=} 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{K} = 1$

Analyt. Berechnung der Stabilitätsgrenze in der (K, τ) -Ebene :

(1), (2) $\Rightarrow \left(\frac{K-2}{K}\right)^2 + \left(\frac{\omega-q}{K}\right)^2 = \cos^2 q\tau + \sin^2 q\tau = 1$

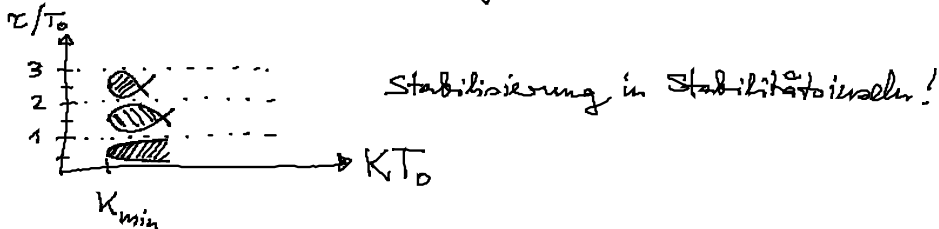
$$\Rightarrow \omega - \eta = \pm K \sqrt{1 - \left(\frac{K-2}{K}\right)^2}$$

$$\eta = \omega \mp \sqrt{(2K-2)\alpha} \quad \text{eliminiert aus (1), (2)}$$

feste Par. α, ω des unkontrollierten Systems

$$\Rightarrow \text{Relation zwischen } \tau \text{ und } K \text{ aus (1): } \tau(K) = \frac{\arccos \frac{K-2}{K}}{\omega \mp \sqrt{(2K-2)\alpha}}$$

arccos hat mehrere Zweige:



Hövel u. Schöll, Phys. Rev. E 72, 0620 (2005)

Erweiterung (Socolar, Sukow, Gauthier, PRE 50, 3245 (1994))

- multiple-time feedback (ETDAS, extended time-delay auto-synchronization)

$$K \sum_{n=0}^{\infty} R^n [x(t-n\tau) - x(t-(n+1)\tau)] \quad \text{gedächtnispar. R} \\ (0 \leq R < 1)$$

Eigenwertgl.

$$\lambda + K \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{1 - R e^{-\lambda\tau}} = \lambda \pm i\omega \quad \text{Stab. bereich vergrößert}$$

Dahms, Hövel, Schöll, PRE 76, 056201 (2007)

- Latenz-Effekte

$$K [x(t-\delta) - x(t-\delta-\tau)] \quad \text{Latenzzeit } \delta$$

Stab. bereich verkleinert

- phasen-abhängige Rückkopplung $K e^{i\varphi}$

$$K \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

- asymptot. Skalierungsverhalten für große τ

Yanchuk, Wolfrum, Hövel, Schöll, PRE 74, 026201 (2006)

Wolfrum et al., EPL-ST 191, 91 (2010)