English Summary:

Stabilization of unstable periodic orbits

$$\boxed{\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1+i\gamma)|z|^2)z + b(z(t-\tau) - z(t))} \quad \begin{matrix} z \in \mathbb{C} \\ b \in \mathbb{C} \end{matrix} \quad \text{(subcrit. Hopf bif)}$$

Floquet exp. $\Lambda \in \mathbb{C}$: $\Lambda + K(1 - e^{-\Lambda\tau}) = \lambda + i\omega$ for diagonal control $(b = K \in \mathbb{R})$

3. Gekoppelte Systeme und Netzwerke

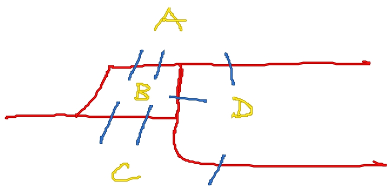
Betrachte N gekoppelte Elemente $\longrightarrow$ dynamisches Netzwerk

Kopplung: links (Kanten eines Graphen, edges)

Elemente: nodes (Knoten) im Netzwerk (vertices)

- Topologie: Welche Knoten sind gekoppelt?
- Kopplungsschema: wie sind die Knoten gekoppelt (welche Variable)?

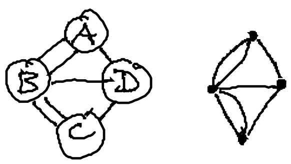
z.B. Königsberger Brückenproblem – gelöst von Euler 1735



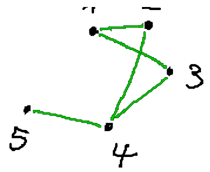
Gibt es einen Weg, der jede Brücke nur einmal benutzt?

Antwort: Nein

Knoten mit ungerader Anzahl von (Ordnung) dürfen nur Start oder Endpunkt sein.



3.1.1 Topologie des Netzwerkes



$N \times N$ Matrix, N Zahl der Knoten

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hier: nicht gerichtete Kopplung (bidirektional)

$\Downarrow$

$\underline{\underline{A}}$ symmetrisch

$\underline{\underline{A}}$ adjacency matrix (Nachbarschafts-matrix)

$\downarrow$

$$a_{ij} = 1, \quad \text{falls Koppl. } i \leftrightarrow j$$
$$= 0 \quad \text{sonst}$$

Erweiterung auf gerichtete Kopplung $i \leftarrow j$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A}}$ nicht mehr symmetrisch

" auf gewichtete Kopplungen $\Rightarrow$ a_{ij} nicht nur auf Werte 0 oder 1 beschränkt

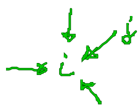
$\Downarrow$

statt von $\underline{\underline{A}}$ spricht man von Kopplungsmatrix G

g_{ij}: Stärke der Kopplung ($g_{ij} \in \mathbb{R}$)

Charakterisierung der Topologie durch bestimmte Kenngrößen:

Knotenordnung (degree of node): $k_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$ (Zahl der angekoppelten Elemente)



in-degree

Verteilung von k (degree distribution): $P(k)$ Wahrscheinlichkeit, einen Knoten mit Ordnung k zu finden

mittlere Knotenordnung (average degree) $\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} P(k)\, k$

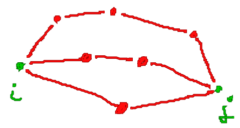
mittlere Pfadlänge (globale Eigenschaft)

$$\ell = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i<j} d_{ij}$$

$N(N-1) =$ max. Zahl der links

kürzeste Verbindung zweier Knoten:

$$d_{ij} = \min_{P_{ij}} \sum_{k,\ell \in P_{ij}} a_{k\ell}$$



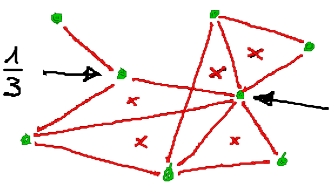
$P_{ij} := \{$Pfade zwischen i und $j\}$

Clusterkoeffizient (lokale Eigenschaft, $0 < c_i < 1$)
Cliquenbildung

$$C_i = \underbrace{\frac{1}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}}}_{\text{Anzahl der max. möglichen Dreiecke, die } i \text{ enthalten}} \underbrace{\sum_{jk} a_{ij} a_{ik} a_{jk}}_{\text{Anzahl von angrenzenden Dreiecken}}$$

Beispiel:

$C_3 = \frac{1}{3}$



$C_6 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$k_i = 6$, $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ mögl. Δ

Einbettung (betweenness) (Wichtigkeit der Knoten)
Anzahl der Pfade, die durch den Knoten laufen

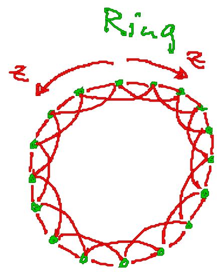
Closeness: inverse mittlerer Abstand von allen anderen Knoten

Mischungsmuster: Netzwerke mit verschiedenen Knotensorten

- assortative mixing: Präferenz für Verbindung gleicher Knoten
- disassortative mixing: Präferenz für Verbindung ungleicher Knoten

Beispiele: soziales Netz (Freundschafts-Netz)
ökolog. Netzwerke (Räuber-Beute-Netz)
ökonom. Netzwerke (Banken, Finanzmärkte)
technolog. Netzwerke (Internet, WWW
Verkehrsnetze, Stromnetze)
Smart power grids
biolog. Netzwerke (genet. regulierende Netzwerke)
neuronale Netzwerke (Gehirn: 10^{11} Neuronen
10^{14} links)

Beispiel 1: Reguläres Netzwerk



- Jeder mit jedem der $m = 2z$ nächsten Nachbarn verbunden
  - konstante Knotengrade $k_i = 2z = \langle k \rangle$
  - degree distribution $P(k) = \delta_{km}$
  - mittl. Pfadlänge $\ell \sim N^{1/d}$
  - Clusterkoeff. $C = \dfrac{3 \cdot \frac{z}{\cancel{2}}(z-1)}{\frac{2z(2z-1)}{\cancel{2}}}$

    (groß, ≤ 1)

Dim. des Gitters $d=1$
$z=2$ (Verbindungen zu allen 1. und 2. Nachbarn)
nicht lokal

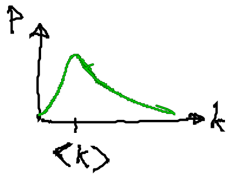
Beispiel 2: zufälliges Netzwerk
(Erdős–Rényi 1960)

Ausgangspkt.: globale Kopplung (all-to-all),
vollständiger Graph
$\dfrac{N(N-1)}{2}$ links

Jetzt: Jeder Link ex. mit Wahrscheinlichkeit p

→ Degree distribution $P(k) = \frac{\langle k\rangle^k e^{-\langle k\rangle}}{k!}$

(Poisson-Statistik)



– mittlere Knotenordnung $\langle k\rangle = p(N-1)$

– mittlere Pfadlänge $\ell = \frac{\ln N}{\ln \langle k\rangle}$

(klein bei großem N, wächst nur langsam)

– Clusterkoeff. $C = \frac{\langle k\rangle}{N} \approx p$

($\to 0$ für große N und endl. $\langle k\rangle$)

Beispiel 3: Kleine-Welt-Netzwerke (small world)

(Watts-Strogatz)