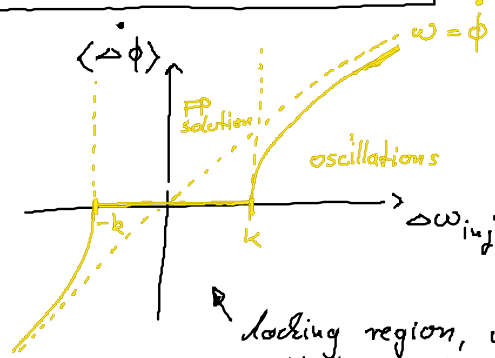


English Summary

- Phase oscillator ϕ with injection of a periodic signal ϕ_{inj}

$$\dot{\Delta\phi} = \Delta\omega_{inj} - k \sin \Delta\phi$$

Adler equation



(Output) $\dot{\phi} = \dot{\phi} - \dot{\phi}_{inj}$

(Input) $\Delta\omega_{inj} = \omega - \omega_{inj}$

$$k = \frac{K}{|A|} = \frac{|\epsilon_{inj}|}{2|A|}$$

locking region, where driven oscillator (slave) oscillates with driving frequency $\phi_{inj} = \omega_{inj}$

- inside locking region $\phi(t) \sim e^{i\omega_{inj}t}$

- class A laser with optical injection

$$\dot{E} = i\omega E + \frac{1}{2} E \left(\frac{P}{1+|E|^2} - 1 \right) + \frac{|\epsilon_{inj}|}{2} e^{i\omega_{inj}t}$$

\Downarrow

$$\dot{\bar{E}} = i\Delta\omega_{inj} \bar{E} + \frac{1}{2} \bar{E} \left(\frac{P}{1+|\bar{E}|^2} - 1 \right) + \frac{|\epsilon_{inj}|}{2}$$

\Downarrow

$$A(t) = \frac{1}{2} A(t) \left(\frac{P}{1+|A|^2} - 1 \right) + K \cos \Delta\phi$$

$$\dot{\Delta\phi} = \Delta\omega_{inj} - \frac{K}{|A|} \sin \Delta\phi$$

Equation for real valued $A(t)$ and $\phi(t)$

usually for free running laser $E = A(t) e^{i\omega t}$

with injection

$$E = \bar{E}(t) e^{i\omega_{inj}t} = A(t) e^{i\phi}$$

$$\bar{E}(t) = A(t) e^{i\Delta\phi}$$

- intensity dependent injection strength $k(A) = \frac{K}{|A(t)|}$
- also locking phenomena observed!

5.6.3 Halbleiterlaser mit optischer Injektion

- Modell enthält α -Faktor (Amplituden-Phasen Kopplung)
 - Modell enthält Dynamik der Ladungsträger $n \hat{=} \text{Abweichung von der Ladungsträgerzahl an der Schwelle (stimulationslos)}$
- $n = \tilde{n} - n_{th}$ (injektionsstärke)

$$\dot{E} = (1 + i\alpha) n E - i\Delta\omega_{inj} E + K$$

$$\dot{n} = \gamma (J - n - (1 + 2u)|E|^2)$$

$K = \frac{|E_{inj}|}{z_{in}}$
 • rotating frame vom Master

Im Prinzip sind Lösungen und Stabilität bestimmbar.

Alternativ: Lösungen finden durch Entwicklung in Ordnungen von K (Verhalten bei kleiner Injektion)

Zunächst reelle Größen einführen: $E = A(t) e^{i\Delta\phi}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{A} = n \cdot A + K \cos \Delta\phi & \text{(I)} \\ \dot{\Delta\phi} = \Delta\omega_{inj} - \alpha n - \frac{K}{A} \sin \Delta\phi & \text{(II)} \\ \dot{n} = \gamma (J - n - (1 + 2u) A^2) & \text{(III)} \end{cases}$$

$$\Delta\phi = \phi - \phi_{inj}$$

class B Laser mit Injektion

Ansatz: $A = A_0 + K A_1 + \dots$

$$\Delta\phi = \phi_0 + K \phi_1 + \dots$$

$$n = n_0 + K n_1 + \dots$$

$$\Delta\omega_{inj} = K \Delta_1 + K^2 \Delta_2 + \dots$$

K klein

• Für $K \rightarrow 0$ muss steady state des Einzelasers herauskommen: $n_0 = 0$

Zeiten? $\rightarrow t, Kt$

Vielzeitensatz :
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}}_K = \frac{\partial}{\partial t} + K \frac{\partial}{\partial z}$$

- motiviert durch Struktur der DGL
- „ausbalancierte“ Gleichungen

d.h.

$$A(t, z) = A_0(t, z) + K A_1(t, z) + \dots$$

Einsetzen in DGL System

zunächst in (I) :
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} A_0}_{\text{(linke Seite)}} + K \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} A_0}_{\text{(linke Seite)}} + K \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} A_1}_{\text{(linke Seite)}} + K^2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} A_1}_{\text{(linke Seite)}} = \left(\underbrace{n_0}_{\text{(rechte Seite)}} + K n_1 \right) \left(\underbrace{A_0 + K A_1}_{\text{(rechte Seite)}} \right) + K \cos(\phi_0 + K \phi_1)$$

0. Ordnung in K : $\frac{\partial}{\partial t} A_0 = n_0 A_0 = 0$

1. Ordnung in K :
$$\frac{\partial}{\partial z} A_0 + \frac{\partial}{\partial t} A_1 = n_1 A_0 + \cos(\phi_0) \quad *_1$$

danach in (II) :
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \phi_0}_{\text{(linke Seite)}} + K \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \phi_0}_{\text{(linke Seite)}} + K \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \phi_1}_{\text{(linke Seite)}} + K^2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \phi_1}_{\text{(linke Seite)}}$$

$$= \underbrace{K \Delta_1}_{\text{(linke Seite)}} + K^2 \Delta_2 - \alpha \underbrace{K n_1}_{\text{(linke Seite)}} - \frac{K}{\underbrace{A_0 + K A_1}_{\text{(linke Seite)}}} \sin(\phi_0)$$

$= \frac{K}{A_0}$ in 1. Ordnung

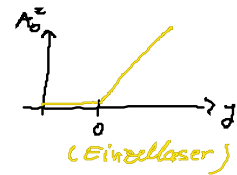
0. Ordnung : $\frac{\partial}{\partial t} \phi_0 = 0$

1. Ordnung : $\frac{\partial}{\partial z} \phi_1 + \frac{\partial}{\partial t} \phi_0 = \Delta_1 - \alpha n_1 - \frac{1}{A_0} \sin(\phi_0)$

substituiert in (III) : $\frac{1}{\gamma} \left(K \frac{\partial}{\partial t} n_1 + K^2 \frac{\partial}{\partial t} n_1 \right) = \underline{J} - \underline{K n_1} - \underline{(1 + 2K n_1) (A_0^2 + K^2 A_1^2 + 2K A_0 A_1)}$

0. Ordnung : $J = A_0^2 \rightarrow A_0 = \sqrt{J}$

$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial t} A_0 = 0 = \frac{\partial}{\partial t} A_0$



1. Ordnung : $\frac{\partial}{\partial t} n_1 = -n_1 - 2A_0 A_1 + 2n_1 A_0^2$

$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} n_1 = -n_1 (1 + 2J) - 2\sqrt{J} A_1 \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$

↑
Einsetzen von $*_1$
(vorher $\frac{\partial}{\partial t}$ der ganzen Gleichung)

$\frac{1}{\gamma} \ddot{n}_1 = -\dot{n}_1 (1 + 2J) - 2\sqrt{J} \dot{A}_1$
 $= -\dot{n}_1 (1 + 2J) - 2\sqrt{J} (n_1 A_0 + \cos \phi_0)$

DGL mit konstanter Inhomogenität und konstanten Koeffizienten

Lösung ist bekannt

$\Rightarrow n_1(t) = c_1 e^{-\Gamma t} + c_2 e^{-\overline{\Gamma} t} - \frac{1}{\sqrt{J}} \cos \phi_0 \quad (*_n)$

- d.h. n_1 bewegt sich exponentiell zu $\boxed{-\frac{1}{\sqrt{J}} \cos \phi_0 = n_1}$
- Dynamik in z erst in nächster Ordnung von K

Einsetzen von $(*_n)$ in $*_1$

$\frac{\partial}{\partial t} A_1 = -\frac{1}{\sqrt{J}} \cos \phi_0 \sqrt{J} + \cos \phi_0 = 0$

- A_1 hat keine Zeitabhängigkeit von t

Phasengleichung II in 1. Ordnung : (mit α_1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_1 = \Delta_1 + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{J}} \cos \phi_0 - \frac{1}{\sqrt{J}} \sin \phi_0 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_1 = \Delta_1 + \frac{1}{\sqrt{J}} \left(-\sqrt{1+\alpha^2} \cdot \sin(\phi_0 - \arctan \alpha) \right)$$

Rücktransformation in Größen $\Delta\phi, \Delta\omega_{inj}$:

$$\begin{cases} \Delta\phi = \phi_0 + K\phi_1 \\ \Delta\omega_{inj} = K\Delta_1 \end{cases}$$

$$\Delta\dot{\phi} = \Delta\omega_{inj} - \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{J}} K \sin(\phi_0 - \arctan \alpha)$$

} Halbleiter
Adlergleichung

$$A_1 = \text{const}$$

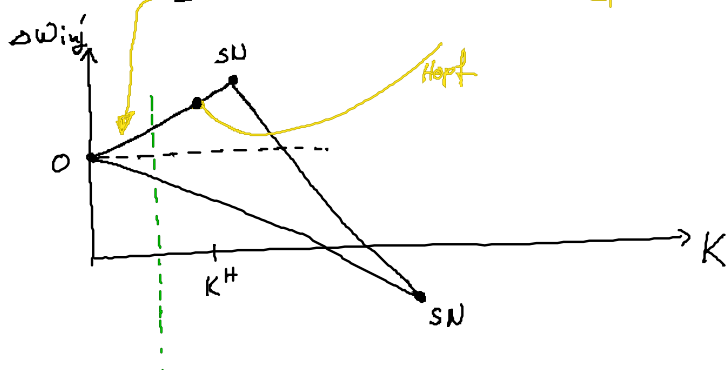
$$\eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{J}} \cos \phi_0$$

Dynamik des Lasers für kleine K

=> Lockingbereich gegeben durch

$$\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{J}} K \geq |\Delta\omega_{inj}|$$

d.h. α ändert Größe des Lockingbereiches



↔
Gültigkeitsbereich der HL-Adler-Gleichung

→ kann zur Bestimmung von α verwendet werden

- Position der Hopf-Linie abhängig von der Dämpfung der RO

$$K^H \sim \frac{\Gamma_{RO}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$