English Summary:

Deterministic Chaos

- sensitive dependence upon initial conditions: Lyapunov exp. $\lambda > 0$

  $\varepsilon \sim e^{\lambda t}$
- broad-band power spectral density

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle_t}_{\text{autocorrelation fct.}} e^{i\omega\tau} \, d\tau$$

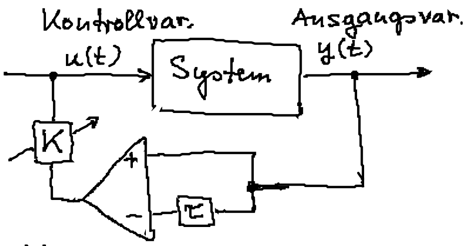
- strange attractor: fractal dimension $d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$

$$\Leftrightarrow \; N \sim \varepsilon^{-d}$$

- universal bifurcation scenarios, e.g., period-doubling cascade (Feigenbaum)

2. Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Schema:



K. Pyragas: "Continuous control of chaos by self-controlling feedback"
Phys. Lett. A 170, 421 (1992)

Verzög.zeit τ
Rückkopplungsstärke K

closed loop control (Rückkopplungskontrolle)

„time-delayed feedback (TDF)" oder Pyragas-Kontrolle:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{\underline{K}}\,(\underline{y}(t-\tau) - \underline{y}(t))}$$

Vorteil der Pyragas-Kontrolle:

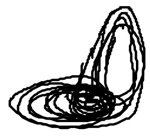
- keine Kenntnis des Zielzustandes nötig
- nichtinvasiv; Kontrollkraft verschwindet, wenn Zielzustand erreicht ist.

Beispiel: (i) Stabilisierung eines instab. period. Orbits der Periode T:
wähle $\tau = T$, bei erfolgreicher Stabilisierung
$x(t) = x(t-\tau) \Rightarrow u = 0$

(ii) Stabilisierung von Fixpkt.en

z.B. Rössler – System (chaot. System)

$$\dot{x} = -y - z \quad - \quad K(x(t) - x(t-\tau))$$
$$\dot{y} = x + ay$$
$$\dot{z} = b + \underbrace{z(x-\mu)}_{\text{Nichtlin.}}$$



chaotisch für z.B.: $a = 0.2$, $b = 0.2$, $\mu = 6.5$
Periode 1-Orbit mit $T_1 = 5.91679$
" 2-Orbit mit $T_2 = 11.82814$

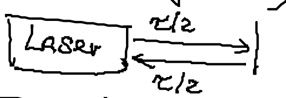
Periode 1-Orbit stabilisiert (nichtinvasiv) für $0.24 < K < 2.3$
Balanov, Janson, Schöll: Phys. Rev. E 71, 016222 (2005)

2.1 Retardierte komplexe Systeme

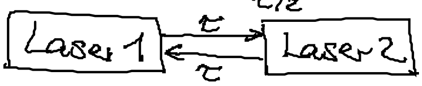
Delay-Differenzialgln.: $\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t-\tau))$
Verzögerungszeit τ

Delay (Retardierung) ist weit verbreitet in nichtlin. Systemen

- mechan. Systemen: Balancierung, Segway
- elektron. Stromkreis: Signalverarbeitungszeiten (Latenzzeit)
- optische Systeme: Signallaufzeiten (Lichtgeschw.)
  - Laser mit opt. Rückkoppl.



  - 2 gekoppelte Laser



- biolog. Systeme: Zell-Zyklus-Zeit τ
biolog. Uhren

– neuronale Netzwerke: zeitverzögerte Kopplung

$\bullet \underset{\longleftarrow}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \circ$

zeitverzögerte Rückkopplung

$\bullet \circlearrowleft_{\tau}$ z.B. biochem. Prozesse (Neurotransmitter)

neuro-vaskuläre Kopplung

<u>Retardierung generiert reichhaltiges komplexes Verhalten</u>

- Retardierung erhöht die Phasenraumdim. einer ODG (ordinary diff. eq.) auf unendlich.
  Anfangsbed. auf ganzem Intervall $[-\tau, 0]$ notwendig:
  history fct.. $x(t)$ auf $-\tau \leq t \leq 0$
- Einfache Dgl. produzieren komplexes nichtlin. Verhalten
  - delay-induzierte Bifurk., Instabilität
  - delay-induzierte Multistabilität
  - Stabilisierung von instab. period. oder stat. Zuständen
  - Chaoskontrolle (Unterdrückung von Chaos)

Lit.: T. Erneux: Applied delay diff. eqs. (2009)

Springer Outstanding Theses Series:

Hövel, Flunkert, C. Otto, D. Rosin, J. Lehnert, B. Lingnau

Theme Issues of Phil. Trans. Roy. Soc. A368 (2010): Delayed Coupl. Syst. (Ed. Just, Pelster, Schanz, Schöll)

" A371 (2013): Dyn, Control and Information in Delay-coupled Systems (Ed. Flunkert, Fischer, Schöll)

Control of Self-Org. Nonlin. Systems (2016) (Ed. Schöll, Hövel, Klapp)

2.2 Lineare Stabilitätsanalyse retardierter Diff.glg.

einfachste lin. Delay-Dgl. $\dot{x} = -a x(t) + b x(t-\tau)$ $\quad a, b, x \in \mathbb{R}$

Anf. bed. $x(t) = \phi(t) \quad -\tau \leq t \leq 0$

Fixpkt. $x^* = 0$

kleine Störung: $x(t) \sim e^{\Lambda t}$

$\Rightarrow \Lambda e^{\Lambda t} = -a e^{\Lambda t} + b e^{\Lambda t} e^{-\Lambda \tau}$

$\Rightarrow \boxed{\Lambda = -a + b e^{-\Lambda \tau}}$ transzendente char. Gl. für die Eigenwerte $\Lambda \in \mathbb{C}$

Lösung für Λ: $\underbrace{(\Lambda + a)\tau}_{z} = b\tau e^{-\Lambda \tau}$

$$z e^z = b\tau e^{a\tau}$$

inverse Fkt. von $z e^z = y$: $z = W_\ell(y)$ Lambert-Fkt.

(vielblättrig, $\ell \in \mathbb{Z}$)

(cf. $e^z = y \Leftrightarrow z = \ln y$)

$\Rightarrow \Lambda_\ell = -a + \frac{1}{\tau} W_\ell(b\tau e^{a\tau})$ $\left(\begin{array}{l} a>0 : \text{stab. Fixpkt. ohne Delay} \\ a<0 : \text{instab. Fixpkt. " "} \end{array}\right)$

allg. Lös. $x(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell e^{\Lambda_\ell t}$

<u>Hauptzweig</u> : $W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n$ $\quad (|z| < \frac{1}{e})$

<u>asymptot. Entw.</u> für $z \to 0$ u. $z \to \infty$ $(\ell \neq 0)$

$$W_\ell(z) \approx \ln z + 2\pi i \ell - \ln(\ln z + 2\pi i \ell)$$

<u>$\tau \to 0$</u> $(z \to 0)$

$W_\ell(z) \approx \underbrace{\ln z}_{\to -\infty} + 2\pi i \ell +$ höh. Ordn.

$$\boxed{\Lambda_\ell \to -\infty \quad \forall \ell \neq 0}$$

<u>$\tau \to \infty$</u> $(z \to \infty)$: $\Lambda_\ell \approx \underset{\to}{-a} + \frac{1}{\tau}\left[\ln(b\tau) + \underset{\to}{a\tau} + 2\pi i \ell - \ln(\ln z + 2\pi i \ell)\right]$

Lit.: Amann, Schöll, Just: Physica A <u>373</u>, 191 (2007)