


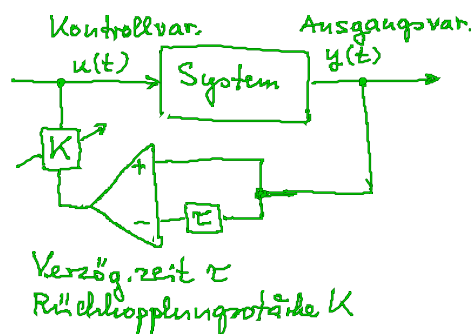
## English Summary:

### Deterministic Chaos

- sensitive dependence upon initial conditions: Lyapunov exp.  $\lambda > 0$
- broad-band power spectral density
 
$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle x(t)x(t+\tau) \rangle}_{\text{autocorrelation fct.}} e^{i\omega\tau} d\tau$$
- strange attractor: fractal dimension  $d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$   
 $\Leftrightarrow N \sim \epsilon^{-d}$ 

- universal bifurcation scenarios, e.g., period-doubling cascade (Feigenbaum)

## 2. Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Schema:



K. Pyragas:

"Continuous control of chaos by self-controlling feedback"

Phys. Lett. A 170, 421 (1992)

closed loop control (Rückkopplungskontrolle)

time-delayed feedback (TDF) oder Pyragas-Kontrolle:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{K} (\underline{y}(t-\tau) - \underline{y}(t))$$

Vorteil der Pyragas-Kontrolle:

- keine Kenntnis des Zielzustandes nötig
- nichtinvasiv; Kontrollkraft verschwindet, wenn Zielzustand erreicht ist.

Beispiel: (i) Stabilisierung eines instab. period. Orbits der Periode  $T$ :

wähle  $\tau = T$ , bei erfolgreicher Stabilisierung  $x(t) = x(t-\tau) \Rightarrow u = 0$

(ii) Stabilisierung von Fixpt.en

z.B. Rössler-System (chaot. System)

$$\dot{x} = -y - z - K(x(t) - x(t-\tau))$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = b + z(x - \mu)$$

Nichtlin.



chaotisch für z.B.  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $\mu = 6.5$

Periode 1-Orbit mit  $T_1 = 5.91679$

" 2-Orbit mit  $T_2 = 11.82814$

Periode 1-Orbit stabilisiert (nichtinvariant) für  $0.24 < K < 2.3$

Balanov, Janson, Schöll: Phys. Rev. E 71, 016222 (2005)

## 2.1 Retardierte komplexe Systeme

Delay-Differenzialgl.n.:  $\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t-\tau))$   
Verzögerungszeit  $\tau$

Delay (Retardierung) ist weit verbreitet in nichtlin. Systemen

- mechan. Systemen: Balancierung, Segway !

- elektron. Stromkreise: Signalverarbeitungszeiten (Latenzzeit)

- optische Systeme: Signallaufzeiten (Lichtgeschw.)

• Laser mit opt. Rückkoppl.



• 2 gekoppelte Laser



- biolog. Systeme: Zell-Zyklus-Zeit  $\tau$   
biolog. Uhren

- neuronale Netzwerke: zeitverzögerte Kopplung



zeitverzögerte Rückkopplung

z.B. biochem. Prozesse  
(Neurotransmitter)  
neuro-vaskuläre Kopplung

Retardierung generiert reichhaltiges komplexes Verhalten

- Retardierung erhöht die Phasenraumdim. einer ODE (ordinary diff. eq.) auf unendlich.  
Anfangsbed. auf ganzem Intervall  $[-\tau, 0]$  notwendig:  
history  $fct. x(t)$  auf  $-\tau \leq t \leq 0$
- Einfache Dgl. produzieren komplexes nichtlin. Verhalten
  - delay-induzierte Bifurk., Instabilität
  - delay-induzierte Multistabilität
  - Stabilisierung von instab. period. oder stat. Zuständen
  - Chaotikontrolle (Unterdrückung von Chaos)

Lit.: T. Erneux: Applied delay diff. eqs. (2009)

Springer Outstanding Theses Series:

Hövel, Hinke, C. Otto, D. Rosin, J. Lehnert, B. Lingnan

Theme Issues of Phil. Trans. Roy. Soc. A 368 (2010): Delayed Compl. Syst.  
(Ed. Just, Polots, Schanz, Schöll)

" A 371 (2013): Dyn, Control and Information  
in Delay-coupled Systems (Ed. Hinke, Fiedler, Schöll)

Control of Self-Org. Nonlin. Systems (2016) (Ed. Schöll, Hövel, Klapp)

## 2.2 Lineare Stabilitätsanalyse retardierter Diff. glen

einfachste lin. Delay-Dgl.  $\dot{x} = -ax(t) + bx(t-\tau)$   $a, b, x \in \mathbb{R}$   
Auf. bed.  $x(t) = \phi(t)$   $-\tau \leq t \leq 0$

Fixpt.  $x^* = 0$

keine Störung:  $x(t) \sim e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda e^{\lambda t} = -a e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -a + b e^{-\lambda \tau}}$$

transzendente char. gl.  
für die Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\text{Lösung für } \lambda: \underbrace{(\lambda + a)\tau}_{z} = b\tau e^{-\lambda \tau}$$

$$ze^z = bte^{at}$$

inverse Fkt. von  $ze^z = y$ :  $z = W_l(y)$  Lambert-Fkt.

(vielblättrig,  $l \in \mathbb{Z}$ )

(cf.  $e^z = y \Leftrightarrow z = \ln y$ )

$$\Rightarrow \Lambda_l = -a + \frac{1}{e} W_l(bte^{at}) \quad (a > 0 : \text{stab. Fixpt. ohne Delay})$$

( $a < 0$  : instab. Fixpt. " " )

allg. Lös.  $x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{\Lambda_l t}$

Hauptzweig:  $W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n \quad (|z| < \frac{1}{e})$

asymptot. Entw. für  $z \rightarrow 0$  u.  $z \rightarrow \infty$  ( $l \neq 0$ )

$$W_l(z) \approx \ln z + 2\pi i l - \ln(\ln z + 2\pi i l)$$

$z \rightarrow 0$  ( $z \rightarrow 0$ )

$$W_l(z) \approx \ln z + 2\pi i l + \text{höh. Ordn.}$$

$$\downarrow$$

-∞

$\Lambda_l \rightarrow -\infty \quad \forall l \neq 0$

$z \rightarrow \infty$  ( $z \rightarrow \infty$ ):  $\Lambda_l \approx -a + \frac{1}{e} [\ln(bt) + at + 2\pi i l - \ln(\ln z + 2\pi i l)]$

Lit.: Amann, Schöll, Just: Physica A 373, 191 (2007)