

English Summary :

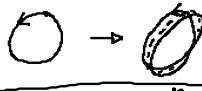
(C) Local bifurcations of limit cycles

(C1) Saddle-node bif. of LC



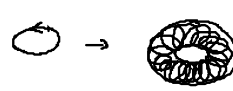
amplitude $\neq 0$
frequency $\neq 0$

(C2) Period doubling



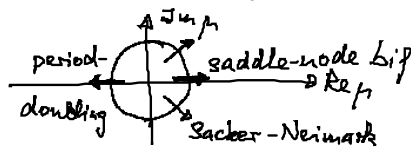
often cascade $2^n T$
period-doubling
route to chaos

(C3) Sacker-Neimark bif



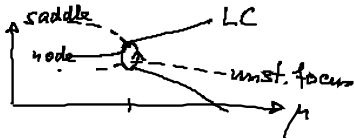
torus
non-commensurate
frequencies

Floquet multiplier $\mu = e^{\lambda T}$



(D) global bif. of LC

(D1) SNIPER bif.



(D2) homoclinic bif



amplitude $\neq 0$
frequ. $\rightarrow 0$

(E) Bifurcation von räumlichen Mustern

$$\dot{\underline{q}}(x,t) = \underline{F}(\underline{q}, \mu) + D \Delta \underline{q} \quad \text{Diff. konst. } D$$

lineare Stab. der Fixphte. (räuml. homogen)

$$\underline{S} \underline{q} \sim e^{\lambda t} e^{ik \cdot x}$$

⇒ Dispersionsrel $\lambda(k)$

⇒ $\text{Re } \lambda(k) < 0$ stabil

> 0 instabil

$= 0$ Bif. von räuml.-period. Lösungen mit Wellenvektor k

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q^*) - D_{ij} k^2$$

(E1) Turing = Instabilität

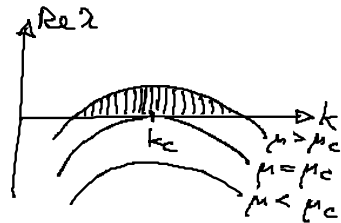
$$\lambda(k) = 0 \quad |k| = k_c \neq 0$$

stationäre, räuml. period. Struktur mit k_c bifurkiert

(z.B. langsam diffundierender Aktivator u. schneller Inhibitor)

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2$$

$$\epsilon = \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}$$



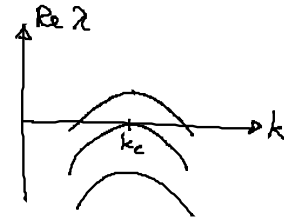
(E2) Stehende/laufende Wellen

$$\lambda(k) = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c \neq 0$$

oszillierende, räuml. period. Struktur

→ Wellen $Sg \sim e^{i(k \cdot x \pm \omega t)}$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2 \pm i\omega$$

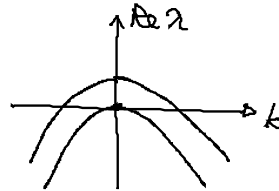


(E3) Hopf-Bifurkation

$$\lambda = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c = 0$$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2)^2 \pm i\omega$$

räuml.-homog. Grenzzyklus



1.4 Determinist. Chaos

Determinist., aber "ungeordnete" Bewegung im Langzeitverhalten von Systemen mit $n \geq 3$ (autonom): selbster (chaotischer) Attraktor

Kriterien zur Klassifikation:

quasiperiod.	determinist. Chaos	stochast. (Rauschen)
wenige dyn. Freiheitsgrade niedrig-dim. Phasenraum		viele mikroskop. Freiheitsgrade (statist. Ensemble) $f \sim 10^{24}$
Attraktor: Torus T^d mit $d=2,3,4, \dots$	seltener Attraktor mit fraktaler Dim.	

Autokorrel. fkt. $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$

period. in τ | $\rightarrow 0$ für $\tau \rightarrow \infty$ | $= 0$ für $\tau > \tau_c$

Fourierspektrum (bzw. spektrale Leistungsdichte $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$
power spectral density
diskrete Frequ. $\omega_1, \omega_2, \dots$ | breites Frequenzband

Instab. der Bewegung
bei kleinen Störungen
der Anfangsbed.

typ. universelle
Bifurkations-szenarien

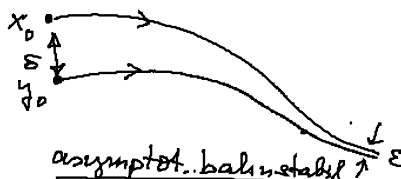
Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich
von den Anfangsbedingungen abhängt.

Quantitative Formulierung der Stab. gegenüber kleinen
Variationen der Anfangsbed.:

Bahnstabilität (orbitale Stabilität)



bahnstabil
(alle benachbarten
Bahnen bleiben
in einer Röhre um
 $\phi(t, x_0)$)



asymptot. bahnstabil
(Abstand der benachbarten Bahnen $\rightarrow 0$
für $t \rightarrow \infty$)

asymptot. stabil :

für dasselbe t gilt: $|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \rightarrow 0$

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve $\phi(t, x_0)$:

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x(t), t)}_{A_{i,k}(t)} \delta x_k$$

$A_{i,k}(t)$: Eigenwerte $\lambda_k(t)$, Eigenvektoren $\underline{v}^{(k)}(t)$

formale Lösung:

$$\delta x(t) = e^{\int_0^t \underline{A}(t') dt'} \delta x(0)$$

Zeitverh. einer infinitesimalen Kugel um x_0

\rightarrow n -dim. Ellipsoid mit Hauptachsen $p_k(t) \approx p_k(0) e^{\bar{\lambda}_k t}$

Def. : Stab. ist bestimmt durch die Lyapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_k(t)}{p_k(0)}$$

NB : Führender (größter) Lyapunov-Exp.

$$\lambda := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t) - y(t)|$$

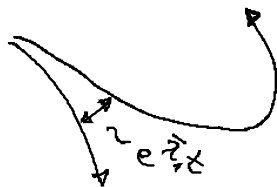
$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \sim e^{\lambda t}$$

$\lambda < 0$: kleine Abweichungen der Anf. bed. exponentiell gedämpft

$\lambda > 0$: expon. Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen

$\hat{=}$ Def. für Chaos

chaotischer Attraktor im \mathbb{R}^3 : $\bar{\lambda}_1 > 0$, $\bar{\lambda}_2 = 0$, $\bar{\lambda}_3 < 0$



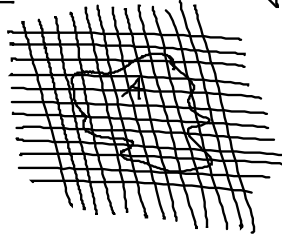
instab. Beweg. Goldstone Annäher. auf dem Attraktor Mode an den Attraktor (invar. Mannigf.)

Quantitative Formulierung der fraktalen Dim. des seltsamen Attraktors

Verallg. Dimensionsbegriff:

Hausdorff-Dimension einer Punktmenge A im \mathbb{R}^n


Sei $N(\epsilon)$ die Mindestzahl von n -dim. Würfeln mit Seitenlänge ϵ , um A zu überdecken.





Dann ist


$$d := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

die fraktale (Hausdorff-) Dim. (d.h. $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^d}$)

Beispiel: Punkt $N(\epsilon) = \text{const.}$  $d=0$

Linie $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$  $d=1$

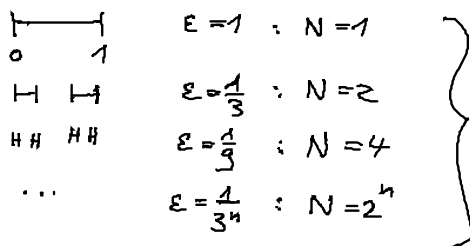
Fläche $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}$  $d=2$

Vol. $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^3}$  $d=3$

Chaotischer Attraktor im \mathbb{R}^3 , Volumen $\rightarrow 0$

$\Rightarrow d < 3$; aber $d > 2$: z.B. Lorenz-Modell $d \approx 2.05...$

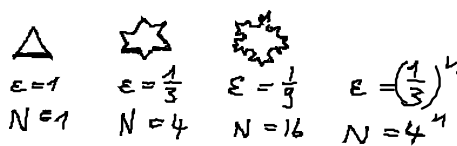
Beispiel: Cantormenge (selbstähnliche Struktur)
hierarchisch, n



$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309...$$

Beispiel: Koch's Kurve (Schneeflocke)

Umfang $= 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow \infty$
 $\Rightarrow d > 1$



$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

$$1 < d = 1.2618... < 2$$

(zwischen Kurve u. Fläche)

analog: Meeresküste