English Summary

1. Dynamical systems and deterministi chaos

$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$ $\quad$ $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dynamical variable

$\underline{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n$ vector field

ϕ flow of the vector field $\underline{F}$

$\phi: M \times \mathbb{R}_t \to M$ $\quad$ ensemble of all trajectories

stability of fixed points $\underline{x}^*$ $\quad$ $(0 = \dot{\underline{x}} = \underline{F}(x^*))$

$\delta \dot{\underline{x}} = (DF)_* \, \delta \underline{x}$ $\quad$ with jacobian $(DF)_* \equiv A$

ansatz $\quad \delta \underline{x} = \xi e^{\lambda t}$ $\quad$ eigenvalues λ_k

1.2 Stabilität und Langzeitverhalten

allg. Def. von Stabilität

- Sei $\underline{x}^*$ FP des dyn. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$ dann ist $\underline{x}^*$ stabil (oder Lyapunov-stabil), wenn zu jeder Umgebung U von $\underline{x}^*$ eine Umgebung V um $\underline{x}^*$ existiert, so dass

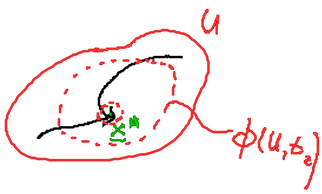
$$\underline{x} \in V \implies \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0$$

(Anfangspunkt)

- Sei $\underline{x}^*$ FP des dyn. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$ dann ist $\underline{x}^*$ asymptotisch stabil, wenn zu $\underline{x}^*$ eine Umgebung U ex.,

$$\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U \qquad 0 < t_1 < t_2$$

und $\lim_{t \to \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U$



(U schrumpft mit wachsendem t auf $\underline{x}^*$ zusammen
d.h. Phasenraumvolumina schrumpfen
Widerspruch $\to$ Liouville'schen Satz für Hamiltonsche Systeme)

▶ Ein dynamisches System heißt dissipativ wenn Phasenraum-volumina schrumpfen (kontrahieren).

Kriterium für (Lyapunov) Stabilität (lokal):

Wenn $\underline{x}^*$ stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(DF)_{x^*}$ einen pos. Realteil.

Beispiel: Fixpunkt a) $(\varphi = 0)$ des Pendels mit/ohne Reibung

Hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität

Alle Eigenwerte haben negative Realteile.

Bsp: Fixpunkt a) des Pendels mit Reibung

Bsp: Instabile FP: b) $(\varphi = \pi)$

Allg. Systeme $n=2$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \underbrace{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} - \lambda \underbrace{(A_{11} + A_{22})} + \lambda^2$$
$$= \det A - \mathrm{tr} A\, \lambda + \lambda^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr} A \pm \sqrt{(\mathrm{tr} A)^2 - 4 \det A}\right)$$

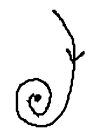
$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$
$$\mathrm{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\mathrm{tr} A = \sum_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)_* = \mathrm{div}\, \underline{F}$$

Fallunterscheidung

(a) Stabiler Fokus: $\mathrm{tr} A < 0$, $\det A > 0$
$(\mathrm{tr} A)^2 < 4 \det A$

$\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega$ $\quad (\lambda_0, \omega > 0)$ gedämpfte Osz. im Phasenraum

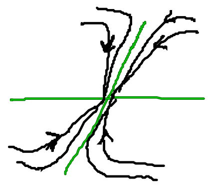


(b) Instabiler Fokus: $\mathrm{tr} A > 0$, $\det A > 0$
$(\mathrm{tr} A)^2 < 4 \det A$

$\lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega$ $\quad (\lambda_0, \omega > 0)$ entdämpfte Osz.

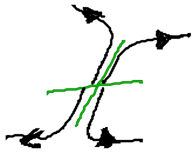
(c) stabiler Knoten: $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A < 0$
$(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$

$\lambda_1 < 0$
$\lambda_2 < 0$



(d) instabiler Knoten: $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0$
$(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$

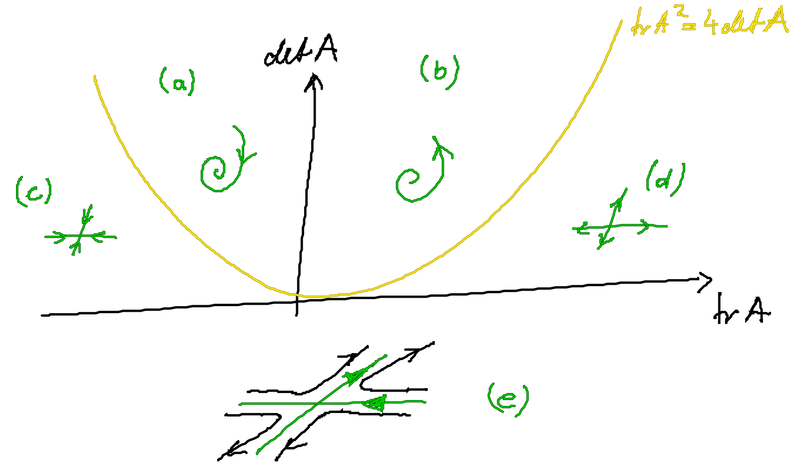
$\lambda_1 > 0$
$\lambda_2 > 0$



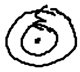
(e) Sattelpunkt: $\det A < 0$

$\lambda_1 > 0$
$\lambda_2 < 0$

$\boxed{n=2}$



Grenzen zwischen den 5 Bereichen: entartete Fälle

- lin. Stabilitätsanalyse versagt, höhere Terme der Taylorentwicklung um Fixpunkt nötig.
  $\operatorname{tr} A = 0$, $\det A > 0$: entweder Zentrum  oder schwach stabiler oder instabiler Fokus.
- qualitative Änderung im Verhalten des Flusses möglich

Bifurkationen = Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit

1.2.1. Speziell Hamilton'sche Vektorfelder

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

f Freiheitsgrade
$2f$ dyn. Größen

Linearisierung um Fixpunkt $\underline{x}^*$, $\delta x(t) = \underline{x} - \underline{x}^*$

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ \vdots \\ q_f \\ p \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr} A = \mathrm{div}\, \underline{F} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ Aus $\mathrm{tr} A = 0 = \sum_{i=1}^{2f} \lambda_i$ folgt, dass keine asymptotische Stabilität möglich ist. (sondern Lyapunov-stabil)

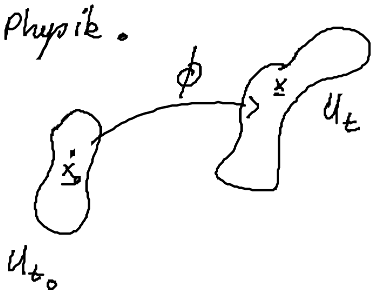
Beweis: Falls asymp. stabil, müssen alle $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$

$$\Rightarrow \mathrm{tr} A = \sum_i \mathrm{Re}\lambda_i + \underbrace{i \sum \mathrm{Im}\,\lambda_i}_{0 \text{ (konj. komplex)}} < 0 \quad ↯$$

möglich: $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$
$\lambda_i = \pm i\omega$ (Zentrum)

Falls $f=1$ $(n=2)$: Fixpunkte können nur Zentren (falls $\det A > 0$) oder Sattelpunkte sein (falls $\det A < 0$).

Für Hamilton'sche Systeme folgt aus $\mathrm{tr} A = \mathrm{div}\, \underline{F} = 0$ der Liouvill'sche Satz der klass. statistischen Physik.



Beweis

V_t : Phasenraumvolumen

$$V_t = \int_{U_t} d^{2f}x = \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \det D\phi_t(\underline{x}_0)$$

$$\phi_t(x_0) = \underline{x}(t)$$

$$D\phi_t(x_0)_{ki} = \left(\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k} \right)$$

Taylor

$$\approx \underbrace{\frac{\partial x^i(t_0)}{\partial x_0^k}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0)\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k}}_{\frac{\partial}{\partial x_0}F_i}$$

$$\begin{pmatrix} 1+(t-t_0)\ldots & & & \\ (t-t_0)\ldots & 1+\ldots & & \\ & & 1+\ldots & \\ & & & 1+\ldots \end{pmatrix}$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \left[1 + (t-t_0)\underbrace{\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i}}_{(\operatorname{div} \underline{F})_{x_0}} + O(t-t_0)^2 \right]$$

$$= V_{t_0} + (t-t_0)\int d^{2f}x_0 (\operatorname{div} F) + O(t-t_0)^2$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}V_t} = \lim_{t\to t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t-t_0} = \int d^{2f}x_0 \underbrace{(\operatorname{div} F)\,\underline{x}_0}_{0 \text{ für Hamilton'sche Systeme}} = \boxed{0}$$

- Phasenraumvolumina erhalten, d.h. Fluss inkompressibel!