

## English Summary

Stochastic differential equations (SDE) with Wiener process

$$W(t) = \int_0^t f(t') dt'$$

Variance and mean of linear SDE

$$x \in \mathbb{R}: dx = \alpha x dt + b dW$$

$$: \langle x \rangle = 0$$

$$\sigma = \frac{b^2}{-2\alpha} \quad \text{if } \alpha \neq 0 \quad \text{else } \sigma = b^2(t-t_0)$$

$$\text{autocorrelation: } \Psi(s) = \sigma e^{\alpha s} \quad \text{if } \alpha \neq 0$$

$$x \in \mathbb{R}^d: d\underline{X} = \underline{A} \underline{X} dt + \underline{B} d\underline{W}$$

$$: \langle \underline{X} \rangle = \underline{0}_t$$

$$\underline{\sigma} = \int_0^t e^{\underline{A}(t-t')} \underline{B} \underline{B}^T e^{\underline{A}^T(t-t')} dt'$$

### 4.3. Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle von rauschinduzierten Oszillationen

Ziel: Kontrolle der Kohärenz ( $t_{cor}$ )  
Kontrolle der Zeitskalen ( $\langle T \rangle$  mittlere Periode)

$$t_{cor} = \frac{1}{\Psi(0)} \int_0^{\infty} |\Psi(s)| ds$$

1. Van der Pol Osz. (lokale Osz. um Fixpunkt)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\epsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + K[y(t-\tau) - y(t)] + Df(t) \end{aligned}$$

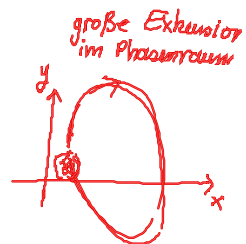
Pyragas Kontrolle



2. Fitzhugh - Nagumo - Modell (globale Osz.)

$$\epsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y$$

$$\dot{y} = x + a + K[y(t-\tau) - y(t)] + Df(t)$$

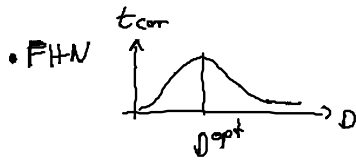


Erinnerung Kohärenzresonanz

• lin. SDE  $t_{\text{cor}} = \int_0^{\infty} |e^{as}| ds = \frac{1}{a} [e^{as}]_0^{\infty} = \frac{1}{-a}$

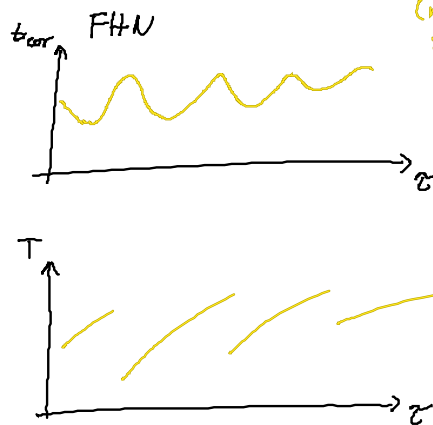
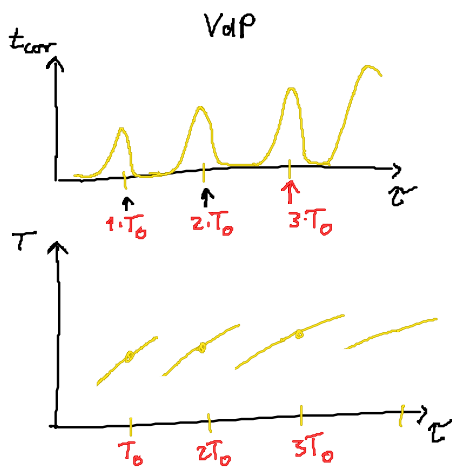
$a < 0$

← nicht abhängig vom Rauschen  $D$   
→ keine Kohärenzresonanz möglich



•  $t_{\text{cor}}(D)$  weil große Phasenraum-Excursionen nicht mit Linearisierung um FP zu beschreiben sind.

mit Kontrolle



$T$ : Periode der Oszillationen  
Janson et al. PRL (2004)

- Verstärkung der Kohärenz  
Vergrößerung von  $t_{\text{cor}}$  für geeignete  $z, K$  (nichtmonotone Abhängigkeit)
- stückweise lineare Modulation der Periode

Erklärung durch Eigenmoden des stabilen (determ.) Systems:

VdP: linearis. der Gl. um  $x=y=0$  ( $D=0$ )

$$\ddot{x} - \varepsilon \dot{x} + \omega_0^2 x - K(\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)) = 0$$

$$x \sim e^{\lambda t} : \boxed{\lambda^2 - \lambda \varepsilon + \omega_0^2 - K\lambda(e^{-\lambda\tau} - 1) = 0}$$

Charakterist. Gleichung

Delay induzierte Hopf? suche  $\lambda = iq$

$$\text{Re: } -q^2 + \omega_0^2 - Kq \sin q\tau = 0 \quad (1)$$

$$\text{Im: } -\cancel{q}\varepsilon + K\cancel{q}(1 - \cos q\tau) = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow \underbrace{\cos q\tau}_{\leq 1} = \underbrace{\frac{K + \varepsilon}{K}}_{> 1}$$

Nein!

→ OsZ. kommen nur vom Rauschen!

$$\lambda = p + iq$$

OsZ. Verhalten von  $\text{Re } \lambda$  als Fkt. von  $\tau$  (in Numerik)

$T_1^e = \frac{2\pi}{|q_1|}$  scheint auf neue Moden zu springen (Moden überkreuzen sich)

(langsamste Mode am anfälligsten fürs Rauschen)

Suchen Mode mit  $p \approx 0$  ( $|\varepsilon| \ll K$ )

( $p=0$  ist ausgeschlossen)

$$\stackrel{(2)}{=} \cos q\tau \approx 1$$

$$q\tau \approx 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{T_1^e = \frac{2\pi}{|q_1|} \approx \frac{\tau}{n}}$$

stückweise linear in  $\tau$

$\max(p_1(\tau))$  ist Maximum der Kohärenz

Periode des ungestörten System  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$q = \frac{2\pi n}{\tau} \stackrel{(1)}{\implies} q^2 = \omega_0^2 \implies \tau = 2\pi \frac{n}{\omega_0} = \boxed{n T_0 = \tau} \quad (\text{am Maximum von } \tau_{\text{osc}} \text{ also bei } p \approx 0)$$

Wunsch : analytische Form für das Spektrum der Oszillationen (VdP + Rauschen)

• wäre einfach für lineare SDE  
 (Spektrum über Wiener-Khinchin  
 aus  $\Psi(s)$ )

Lösung: Mean-field - Näherung der VdP-Osz.

[Pomeau et al.  
 Europhys. Lett. 71  
 (2005)]

Zunächst  $K=0$

Näherung:  $\varepsilon - x^2 \approx \tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon - \langle x^2 \rangle$  (gut für  $D \ll \varepsilon/\omega_0$ )

$\Rightarrow \dot{x} = y$   
 $\dot{y} = \tilde{\varepsilon} y - \omega_0^2 x + D f(t)$  Linear!

$\Rightarrow$  SDE  $dx_s = \underline{A} x_s dt + \underline{B} dW(t)$   $x_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$   
 $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}$   
 $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$

Varianz Matrix  $\underline{\sigma} = \langle x_j(t) \otimes x_k(t) \rangle$   
 $= \frac{D^2}{-2\tilde{\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1/\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (siehe VL vom 9.6.)

$\langle x^2 \rangle = \sigma_{11} = -\frac{D^2}{2\tilde{\varepsilon}\omega_0^2} = \frac{D^2}{-2(\varepsilon - \langle x^2 \rangle)\omega_0^2}$  selbstkonsistente Gleichung für  $\langle x^2 \rangle$  in Abh. von D

$\langle x^2 \rangle^2 - \varepsilon \langle x^2 \rangle - \frac{D^2}{2\omega_0^2} = 0$

$\langle x^2 \rangle = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2D^2}{\omega_0^2}}}{2}$  + unphysikalische Lösung da  $\varepsilon < 0$  und  $\langle x^2 \rangle > 0$

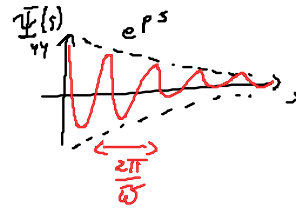
$\Rightarrow \tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \langle x^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\varepsilon^2 \omega_0^2}} \right)$

Dämpfung wächst mit Rauschintensität

Autokorrelationsfunktion

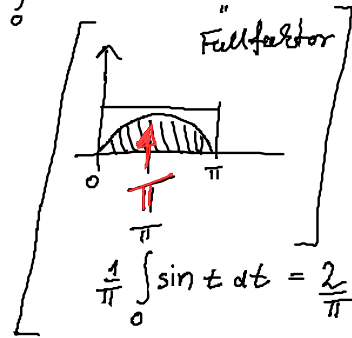
$\Psi_{yy}(s) = \langle y(t) y(t+s) \rangle = \Psi_{yy}(0) e^{\lambda_1 s} \approx \Psi_{yy}(0) e^{\rho s} \cos \tilde{\omega} s$

wobei  $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\tilde{\omega} = \frac{\tilde{\varepsilon}z}{2} \pm i \sqrt{-\frac{\tilde{\varepsilon}z}{4} + \omega_0}$   
 die Eigenwerte von  $\underline{A}$



$$\Rightarrow t_{cor} = \frac{1}{\Psi_{11}(0)} \int_0^{\infty} |\Psi_{11}(s)| ds \approx \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} e^{ps} ds = -\frac{z}{\pi\rho} = \frac{z}{\pi|\rho|} = t_{cor}$$

- Korrelationszeit vom VdP Osz. hängt von  $D$  ab (durch Mean Field Näherung hergeleitet)
- lin. Osz. hat keine  $D$  Abhängigkeit von  $t_{cor}$



Mit Kontrolle  $K \neq 0$

$$\lambda^2 - \tilde{\varepsilon}\lambda + \omega_0^2 - K\lambda(e^{-\lambda\tilde{\varepsilon}} - 1) = 0$$

Die 2 Eigenwerte  $\lambda_{1,2}^e = \delta_p \pm i(1 + \delta_p)\omega_0$   
 $|\delta_p|$  sind entscheidend (dann wie lin. SDE)

unendlich viele EW

$$\lambda_{\pm}^e = \rho_{\pm}^e + i\varphi_{\pm}^e$$

mit betragsmäßig kleinsten

$$t_{cor} = -\frac{z}{\pi\delta_p} \approx \frac{4}{\pi|\tilde{\varepsilon}|} \left(1 + \frac{K}{z}\tilde{\varepsilon}\right)$$

[Beweis kommt aus Entwicklung der EW für  $|\delta_p| \ll 1$ ]