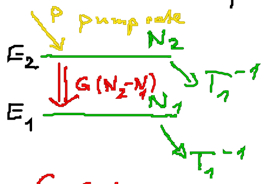
English Summary:

Nonlinear Laser Dynamics

Laser rate equations



photon loss

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{I} &= I(D-1) \\ \dot{D} &= \gamma(P - D(1+I)) \end{aligned}}$$

electron loss

pump

Stimul. Emission

I opt. Intensity

D inversion

G: gain

T_1: lifetime of charge carriers

$\gamma = \tau_{ph}/T_1$

τ_{ph} photon lifetime

$\gamma \sim 1$: Class A (gas lasers)

$\sim 10^{-4}$: Class B (solid state lasers) Nd:YAG

5.2 Normalform der Laser-Ratengleichungen

$I = E^2$

$E = \sqrt{2GT_1}\,\tilde{E}$ dim.lose el. Feldamplitude

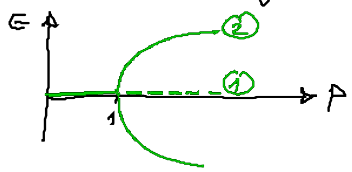
$D = G\tau_{ph}(N_2 - N_1)$ dim.lose Inversion des 2-Niveau-Systems

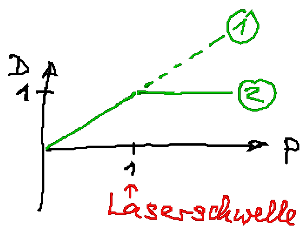
$P = G\tau_{ph} R_{pump} T_1$ dim.lose Pumprate

$t = t^{dim}/\tau_{ph}$ dim.lose Zeit

$$\boxed{\begin{aligned} &(I) \quad \dot{E} = \tfrac{1}{2} E(D-1) \\ &(II) \quad \dot{D} = \gamma(P - D(1+E^2)) \end{aligned}}$$

stationäre Lösungen:





(1) $E = 0$, $D = P$

(2) $E = \pm\sqrt{P-1}$, $D = 1$

Asymptotische Entwicklung

Def.: Die Summe $\sum_{n=1}^{N} f_n(\varepsilon)$ heißt asymptot. Entwicklung für $\varepsilon \to 0$, wenn

$$\frac{f(\varepsilon) - \sum^{\cdot} f_n(\varepsilon)}{f_N(\varepsilon)} \to 0 .$$

(Die Abweichung von der wahren Fkt. f ist kleiner als der letzte Term der Entwicklung)

Üblicherweise Entwicklung in Potenzreihe ε

$$f(\varepsilon) \approx \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varepsilon^n \qquad \varepsilon \to 0$$

- <u>Vielzeitenansatz</u> für Lasergl. (reduktive Störungsrechn.)

Potenzreihen

$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \dots$$

$$D = 1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots$$

(ungestörtes Problem $\varepsilon = 0$: $p = 1$ (Laserschwelle): $E = 0$, $D = 1$)

kleiner Parameter

$$p - 1 = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$$

verschiedene Zeitskalen als unabhängige Variablen

$$\tau_1 = \varepsilon t \quad \text{„langsam"}$$

$$\tau_2 = \varepsilon^2 t \quad \text{„noch langsamer"}$$

$$\vdots$$

$$\tau_n = \varepsilon^n t$$

$$\Rightarrow \quad E(t) = E(\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n)$$

$\Rightarrow$ Kettenregel beim Zeitableiten

$$\frac{dE}{dt} = \underset{\uparrow \atop \frac{\partial \tau_1}{\partial t}}{\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E}{\partial \tau_2} + \dots$$

Einsetzen in (I) und (II) rechte Seite:

$$\dot{E} = \frac{1}{2}(\varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2)(\varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2) + O(\varepsilon^4)$$

$$\dot{D} = \gamma \Big(1 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 - (1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \varepsilon^3 D_3)(1 + \varepsilon^2 E_1^2 + 2E_1E_2\varepsilon^3)\Big) + O(\varepsilon^4)$$

linke Seite:

$$\dot{E} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1}(\varepsilon E_1) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1}(\varepsilon^2 E_2) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}(\varepsilon E_1) + O(\varepsilon^4)$$

$$\dot{D} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1}(\varepsilon D_1) + \varepsilon^3 \left[\frac{\partial}{\partial \tau_1} D_2 + \frac{\partial}{\partial \tau_2} D_1\right] + O(\varepsilon^4)$$

Sortieren nach Ordnungen von ε:

Koeffizientenvergleich

$$O(\varepsilon) \qquad 0 = p_1 - D_1 \qquad (a)$$

$$O(\varepsilon^2) \qquad \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = \frac{1}{2} E_1 D_1 \qquad (b)$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial \tau_1} = \gamma \left(p_2 - D_2 - E_1^2 \right) \qquad (c)$$

$$O(\varepsilon^3) \qquad \frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} = \frac{1}{2}\left(E_2 D_1 + E_1 D_2 \right) \qquad (d)$$

Iteratives Lösen der Gln. (a) – (d)

$$O(\varepsilon) \quad D_1 = p_1 \xrightarrow[\text{in } O(\varepsilon^2)]{\text{einsetzen}} \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = \frac{1}{2} p_1 E_1$$

$$E_1 = E_1(0)\, e^{\frac{1}{2} p_1 \tau_1}$$

unbeschränkt oder Null für $p_1 \neq 0$

↯ Annahme

$$\Rightarrow p_1 = 0 = D_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = 0 \qquad E_1 \text{ nicht von } \tau_1 \text{ abhängig!}$$

$$(c): D_2 = p_2 - E_1^2 \quad , \text{ da } D_1 \equiv 0$$

$\Rightarrow D_2$ auch nicht von τ_1 abhängig

$$(d): \frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} = \underbrace{\boxed{-\frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} + \frac{1}{2} E_1 D_2}}_{\text{nicht von } \tau_1 \text{ abh.}} \quad (+E_2 \underbrace{D_1}_{=0})$$

$= \text{const.} \quad \Rightarrow E_2$ unbeschränkt falls const. $\neq 0$

$$(*) \quad \boxed{\frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} = \frac{1}{2} E_1 D_2 \overset{(c)}{=} \frac{1}{2} E_1 \left(p_2 - E_1^2 \right)}$$

Dgl. für $E_1(\tau_2)$

$$P - 1 = \cancel{\varepsilon p_1} + \varepsilon^2 p_2$$

oBdA: $p_2 = 1$, $p_j = 0$ $(j \geq 3)$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = \sqrt{P-1}}$$

Rücktransformation:

Wir wissen: $D_1 = 0$, $p_1 = 0$, $\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} = \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = 0$

$$\dot E = \varepsilon \cancel{\frac{\partial}{\partial \tau_1}(\varepsilon E_1)} + \varepsilon^2 \left[\cancel{\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1}} + \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} \right] + \dots \Rightarrow \dot E = \varepsilon^3 \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2}$$

$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon E_1 = E - O(\varepsilon^2)$$

$$D = 1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2$$

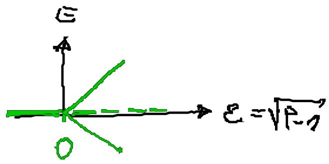
$\Rightarrow$ Einsetzen in (*)

$$\dot E = \varepsilon^3 \left(\frac{1}{2} E_1 (\overset{= p_2}{1} - E_1^2) \right) = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} E^2 + O(\varepsilon^2)\right)$$

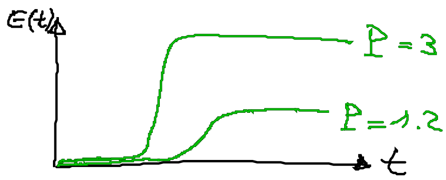
$$\frac{dE}{dt} = \boxed{\dot E = \frac{1}{2} E (\varepsilon^2 - E^2) + O(\varepsilon^3)}$$

<u>Normalform der Laserbifurkation an der Laserschwelle</u>

$\Rightarrow$ <u>Stimmgabel-Bifurkation als Fkt. v. P</u>



- Normalform ergibt Lösung des Dgl-Systems <u>nicht</u> nur in der Nähe des Fixpkt.



$P = 1$: <u>krit. Verlangsamung</u>

$$\tau_2 = \varepsilon^2 t = (P-1) t$$

τ_2 wird beliebig langsam für $\varepsilon \to 0$ $(P \to 1)$

Nichtgleichgewichts-Phasenübergang 2. Ordnung (H. Haken 1970)

- <u>Gültigkeitsgrenzen der Amplitudengl.</u>?

Beim Ansatz der Vielzeitenasymptotik wurde die Zeitskala $\gamma P = \lambda_1$ ignoriert (2. Eigenwert der lin. Stab.-analyse des Fixpkt.)

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma P + \frac{P-1}{P} \\ \lambda_2 &= -\frac{P-1}{P} \end{aligned}\right\} \S\ 1.1$$

Das ist OK, wenn γP nur schnellen exp. Abfall liefert.
Problem, wenn γP klein!
$\Rightarrow$ nur gültig für $\boxed{|P-1| \ll \gamma}$

- für $\gamma = 10^{-3}$ (class B Laser) lässt dies nur einen kleinen Gültigkeitsbereich zu

Grenzfall $\gamma \to 0$
- lineare Stabilitätsanalyse für festes P (nahe am Fixpkt.) $\Rightarrow$ § 5.1
- $|P-1| \ll \gamma \Rightarrow$ Amplitudengl. § 5.2
- P fest + weit weg vom Fixpkt. ? $\Rightarrow$ § 5.3