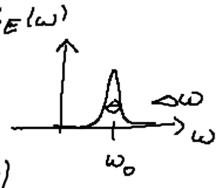
English Summary

- Linewidth of a laser is determined by varianz of the phase ϕ of $E = A(t)e^{i\phi(t)}$



$\Delta\omega = 0$ without noise

$$\Delta\omega = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\, \sigma_{\Delta\phi\Delta\phi}(t)$$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{D^2}{A^2}\,(1+\alpha^2)}$$

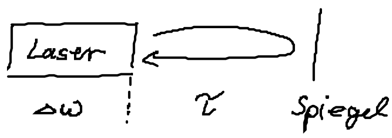
α: amplitude-phase coupling

D: noise strength of spontaneous emission

$A^2 \hat{=} P^{out}$ output power/intensity

5.8.2. Linienbreite mit optischem Feedback

Frage: Wie beeinflusst das zeitverzögerte optische Feedback die Linienbreite?



$\Delta\omega_{Feedback}$?

Gleichung für Laser + Delay + Rauschen

$$\dot{\underline{\tilde{E}}} = (1+i\alpha)(J - |\underline{\tilde{E}}|^2)\underline{\tilde{E}} + D\underline{\xi} + i\omega_0 \underline{\tilde{E}} + k\underline{\tilde{E}}(t-\tau)$$

Idee: Suchen eine effektive Rauschstärke D^{eff}, die den Einfluss des Delay-Terms berücksichtigt.

- Zunächst $\alpha = 0$!

- Amplitude + Phasen Darstellung

$$\dot{E} = A i \dot{\phi} e^{i\phi} + \dot{A} e^{i\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{A} &= (J - A^2)A + D\xi^{i} + kA(t-\tau)\cos(\phi(t-\tau) - \phi(t)) \\ \dot{\phi} &= \omega_0 + \frac{D}{A(t)}\xi^{ii} + k\frac{A(t-\tau)}{A(t)}\sin(\phi(t-\tau) - \phi(t)) \end{aligned}}$$

Erinnerung: • Feedback ändert Frequenz der Lösungen (ECM)

$$\omega_c - \omega_0 = -k\alpha\cos\omega_c\tau - k\sin\omega_c\tau$$

$$\alpha = 0 \quad \omega_c = -k\sin\omega_c\tau + \omega_0$$

• Rotation der Phase ins mitbewegte Koordinatensystem ω_c

$$\Delta\phi = \phi - \omega_c t$$
$$\Delta\dot{\phi} = \dot{\phi} - \omega_c$$

→ dann ist $\Delta\dot{\phi} = 0$ auf ECM also Fixpunkt

Betrachte zuerst nur Phasengleichung auf ECM Lösung $A(t-\tau) = A(t) = A_c$

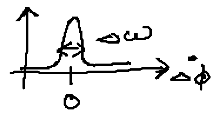
$$\Delta\dot{\phi} = (\omega_0 - \omega_c) + \frac{D}{A_c}\xi^{ii} + k\sin\left(\Delta\phi(t-\tau) - \Delta\phi(t) - \omega_c\tau\right)$$

benutzen: $\frac{d\Delta\phi}{dt} \approx \frac{\Delta\phi(t) - \Delta\phi(t-\tau)}{\tau}$ (für kleine τ)

$$\approx \omega_0 - \omega_c + \frac{D}{A_c}\xi^{ii} + k\sin\left(-\tau\Delta\dot{\phi} - \omega_c\tau\right)$$

Abschätzung von $\tau \Delta \dot\phi$:

auf der ECM ist $\Delta\dot\phi = 0$ und ändert sich nur durch Rauschen



Werte: HL laser $\Delta\nu \approx 10\,\mathrm{MHz}$
$\rightarrow L_{coh} \approx 5\,m$
Faserlaser $\Delta\nu \sim \mathrm{kHz}$
$\rightarrow L_{coh} \approx 100\,km$

$\Delta\omega \sim \frac{1}{t_{coh}}$

↑ Kohärenzzeit

Annahme: $\tau \ll t_{coh}$

$\tau \frac{1}{t_{coh}} = \tau \Delta\dot\phi \ll 1$

Taylor um $x_0 = -\omega_c \tau$

$$\Delta\dot\phi \approx \omega_0 - \omega_c + \frac{D}{A^c}\xi^{ii} + k\left[\sin(-\omega_c\tau) - \tau\Delta\dot\phi\cos(-\omega_c\tau)\right]$$

1. Ordnung in $\tau\Delta\dot\phi$

ECM: $\omega_c - \omega_0 = -k\sin(\omega_c\tau)$

$$\Delta\dot\phi \approx \frac{D}{A^c}\xi^{ii} - \tau\Delta\dot\phi\, k\cos(\omega_c\tau)$$

$$\boxed{\Delta\dot\phi \approx \frac{D}{A^c}\frac{1}{1+\tau k\cos(\omega_c\tau)}\,\xi^{ii}} \;\hat{=}\; \frac{D^{eff}}{A^c}\,\xi^{ii}$$

- gilt nur für kleine τ, also keine zusätzlichen Bifurkationen durch τ

$$D^{eff} := \frac{D}{1+\tau k\cos\omega_c\tau}$$

falls $\omega_c\tau = 0, 2\pi \rightarrow D^{eff} < D$

$\omega_c\tau = \pi \rightarrow D^{eff} > D$

Linienbreite des Lasers:

$$\Delta\omega = \frac{D_{eff}^{2}}{A^2}(1+\alpha^2) = \boxed{\frac{D^2}{A^2(1+\tau k \cos\omega_c \tau)}(1+\alpha^2) = \Delta\omega}$$

aus 5.8.1.

→ Feedback kann die Linienbreite stark verkleinern falls Phase gut justiert wird.

Ende

Zusammenfassung

1 • Fluss von dyn. Systemen

• Attraktoren / Phasenraumvolumen (Hamilton'schen / dissipativen Systemen)

• Bifurkationen • EW 0
- Sattel-Knoten $\dot{x} = \mu - x^2$
- transkritisch $\dot{x} = \mu x - x^2$
- Stimmgabel $\dot{x} = \mu x - x^3$

• Hopf – Bif.

Auffinden über
→ $\lambda = i\omega$
→ suchen nach period. Lösungen

• Globale Bifurkationen
- • Homokline
- • Blue - Sky

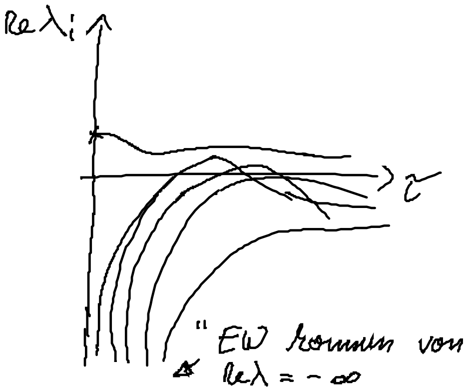
} globale Änderung des Phasenportraits
→ nicht mit linearer Stabilitätsanalyse

• Chaos
- Lyapunov Exponent
- gebrochene Dimension

② Feedback, Delay

- Kontrolle mit Pyragas $\dot{x} = f(x) + K(x(t-\tau) - x(t))$
  - nichtinvasiv $\left[\dot{x} = \underbrace{f(x) - Kx(t)} + K(x(t-\tau)) \right]$

- Phasenraum wird unendlich dimensional
- charakteristisches Polynom ist transzendent (Lambert Funktion)



"EW kommen von" Re $\lambda = -\infty$

üblicherweise der Form:

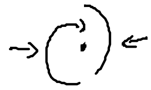
$$0 = \underline{\lambda} - K(1 - \underline{e}^{\lambda t})$$

- Stabilisierung $\left[T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \right]$

$(\lambda = \lambda_0 + i\omega_0)$ <u>FP</u> : Delay $\tau = \frac{T_0}{2}$

<u>Orbit</u> : Delay $\tau = T_0$

mit $f(t+T_0) = f(t)$



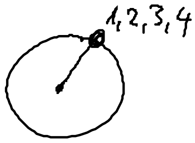
③ gekoppelte Systeme

Synchronisierung: Master stability function [Lyapunov Exponent senkrecht zur synchr. Mannigfaltigkeit]

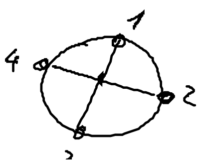
Netzwerke → Topologie ← Adjacency-matrix
→ Dynamik ← DGL

Grenzwert $\tau \to \infty$

Cluster Synchronisierung



1 Cluster



Splay-State

gekoppelte

Hopf-Normalform → Stabilität gut in neuen Koordinaten
bestimmbar

$$2x^S = x_1 - x_2$$
$$2x^A = x_2 + x_2$$

→ entkoppeltes DGL-System in x^S und x^A

④ Rauschen

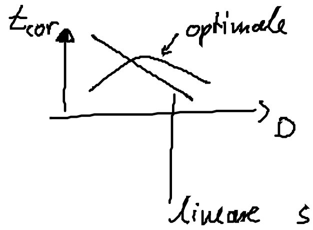
- stochastische DGL

lineare sDGL

$$dx = A\,dt + B\,dW$$

Wiener Prozess ≙ Random walk

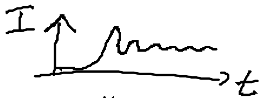
- Kohärenzresonanz



optimale Rauschstärke in nichtlinearen sDGL

lineare sDGL → nie Kohärenzresonanz

- Varianzmatrix
  analytisches Ergebnis aus linearisierter sDGL



⑤ Laser

- Ratengleichungen I, D ← Relaxationsoszillationen, Turn-on Delay
  E, D ← Normalform an der Schwelle

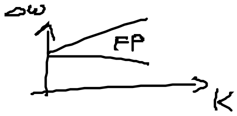
- Spiking (Berechnung über Koordinatenwechsel)

$\boxed{\text{class A, } \mu \text{ groß}}$ Gaslaser >1

$\boxed{\text{class B, } \mu \text{ klein}}$ Halbleiter $\sim 10^{-4}$

$$\mu = \frac{\tau_{ph}}{\tau_{el}}$$

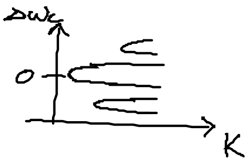
- optische Injektion
  - Adler Gleichung



- Amplituden Phasenkopplung

Methodik : Asymptotische Reduktion (Entwicklung nach kleinem Parameter)

- optisches Feedback
  - Fixpunkte $\to$ ECM's (ω_c)



  - Stabilitätsgrenze
  - Linienbreite über Phasengleichung