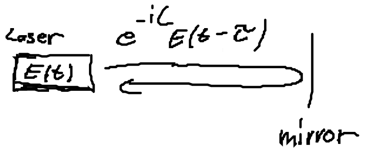
English Summary

- Laser with optical self feedback



$$\dot{E} = (1+i\alpha)\, n E + k e^{-iC} E(t-\tau)$$
$$\dot{n} = \mu\left(J - n - (1+2n)|E|^2\right)$$

[E in rotating frame $e^{i\omega_{th} t}$]

- solutions with constant intensity I_c are given by $E = \sqrt{I_c}\, e^{\overbrace{i(\omega_c - \omega_0) t}}$

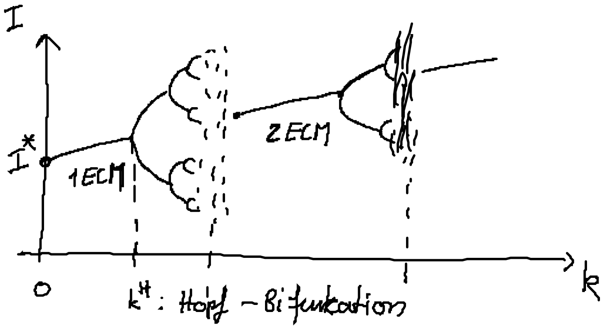
frequency shift due to external cavity

$[\omega_0 = \omega_{th} \cdot \tau_{ph}]$

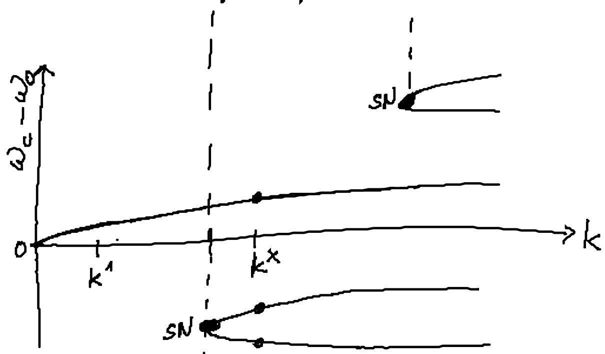
- a solution $\underline{I_c, \omega_c, n_c}$ is called <u>external cavity mode</u> (ECM)

- with increasing k new <u>solutions</u> are born in saddle-node (SN) bifurcations $\tau(\omega_c - \omega_0) = -k\tau(\alpha \cos \omega_c \tau + \sin \omega_c \tau)$

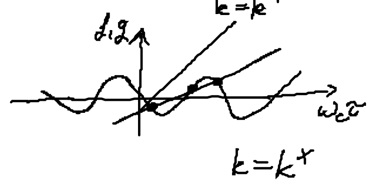
5.7.2 Stabilitätsgrenze der ersten ECM



← numerisches Bifurkationsdiagramm der LK-Gleichungen



← Lösungen der Bestimmungsgleichung für ω_c (ohne Stab. Information)



- Suchen <u>Hopf-Bifurkation</u> der ersten ECM, d.h. bevor die erste SN-Bif. auftritt

- Methoden zum Auffinden

  1) Liniarisieren $\rightarrow$ charak. Polynom $\rightarrow$ Suche nach EW der Form $\lambda = \pm i\omega$

     - mit Delay meist asymptotische Entwicklungen nötig da Polynom transcendent

  2) NEU

     Bedingung an k über Existenzbedingung von period. Lösungen

<u>Satz</u>: Ein System $L\underline{x} = \underline{f}$ (z.B. $\dot{\underline{x}} = D(t)\underline{x} + \underline{f}$) hat genau dann eine periodische Lösung wenn die Lösung des homogenen adjungierten Problems (hier $\dot{\underline{x}}^* = -D^T(t)\underline{x}^*$) die Bedingung

$$\langle x_0^*, \underline{f} \rangle = 0$$

erfüllt.

Voraussetzung: $\dot{\underline{x}} = D(t)\underline{x}$, also $L\underline{x} = 0$, hat eine periodische Lösung.

<u>Beweis</u>: sei $L\underline{x} = \underline{f}$, $L^*\underline{x}_0^* = 0$

p: Periode von x_0, $\underline{L}x_0 = 0$

<u>Def.</u>: adjungierter Operator $\langle x, Ly \rangle = \langle L^* x, y \rangle$

$$\langle \underline{x}_0^*, \underline{f} \rangle = \int_0^p \left(\underline{x}_0^* \cdot \underline{f} \right) dt$$

$$= \int_0^p \left(\underline{x}_0^* \cdot L\underline{x} \right) dt$$

$$= \int_0^p \left(\underbrace{L^* \underline{x}_0^*}_{0} \cdot \underline{x} \right) dt = 0$$

$\blacksquare$

Anwendung auf Laser + Feedback:

- mit Rückkopplung zunächst keine periodische Lösung
- Umschreiben der LK-Gleichung in inhomogene DGL mit homogener DGL, die periodische Lösungen hat!

- LK-Gleichungen in Amplitude & Phase

$$\boxed{\begin{aligned}
\dot I &= 2nI + 2k\sqrt{I(t-\tau)I(t)}\,\cos\left(\Delta\phi(t-\tau)-\Delta\phi-C\right)\\
\dot{\Delta\phi} &= \alpha n + k\sqrt{\frac{I(t-\tau)}{I(t)}}\,\sin\left(\Delta\phi(t-\tau)-\Delta\phi-C\right)\\
\dot n &= \gamma\left(J-n-(1+2n)I\right)
\end{aligned}}$$

$$\left[\begin{aligned}
E &= \sqrt{I}\,e^{i\Delta\phi}\\
\dot E &= \sqrt{I}\,i\dot{\Delta\phi}\,e^{i\Delta\phi} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{I}}\dot I\,e^{i\Delta\phi}
\end{aligned}\right.$$

Neue Variablen wie beim Einzellaser im Limit $\gamma\to 0$ [Class B]

	Problem 0. Ordnung	Inhomogenität f, 1. Ordnung in $\sqrt{\gamma}$
Intensität	$y' = (1+y)X$	$+\,2\frac{k}{\omega_R}\sqrt{(1+y)(1+y(s-\tau))}\,\cos\left(-C+\phi(s-\tau)-\phi\right)$
Phase	$\phi' = \frac{\alpha}{2}X$	$+\,\frac{k}{\omega_R}\sqrt{\frac{1+y(s-\tau)}{1+y}}\,\sin\left(-C+\phi(s-\tau)-\phi\right)$
Inversion	$X' = -y$	$-\,\frac{\omega_R}{2J}X\left(1+2J(1+y)\right)$
		$+\,O(\sqrt{\gamma}^2)$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\omega_R = \sqrt{\gamma\,2J}\\
&\text{RO-Frequenz}\\
&t^{alt} = s\cdot\omega_R
\end{aligned}}$$

- Im Fall $\frac{k}{\omega_R} = O(\omega_R)$ und $\omega_R\to 0$ also $\gamma\to 0$

dann ist das nullte Ordnungs Problem konservativ und hat periodische Lösungen

<u>ABER</u>: $k=0$ aber $\gamma\neq 0$ sind Lösungen gedämpft d.h. nicht periodisch

MIT Feedback werden ROs wieder entdämpft. → Suchen k bei dem die Lösungen wieder periodisch sind.

- Linearisieren des 0. Ordnung Problems (ohne Phase)

$$\delta \dot{\underline{x}} = Df|_{\underline{x}_0}\, \delta \underline{x}$$ (Linearisiert um periodische Lösung x_0, y_0 → Floquet Theory) $[L\underline{x} = 0]$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+y_0 & x_0 \end{pmatrix} \delta \underline{x} \qquad L \equiv \frac{d}{dt}\mathbb{1} - Df|_{x_0}$$

adjungiertes Problem $L^* \delta \underline{x}^* = 0$

[Entwicklung der Goldstone-Mode ist bekannt

$$\delta \underline{x}^G = \dot{\underline{x}}_0 = \begin{pmatrix} -y \\ (1+y_0)x_0 \end{pmatrix}$$]

$$0 = \left[-\frac{d}{dt}\mathbb{1} - \begin{pmatrix} 0 & 1+y_0 \\ -1 & x_0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta\dot{x}^* = -(1+y_0)\,\delta y^*$$
$$\delta \dot{y}^* = \delta x^* - x_0\, \delta y^*$$

wir wissen $\langle \delta \underline{x}^G, \delta \underline{x}^* \rangle = 0$

$$\int dt \left(-y\,\delta x^* + (1+y_0)x_0\, \delta y^* = 0 \qquad \Rightarrow \quad \delta y^* = \frac{y_0}{1+y_0}\right.$$

$$\Rightarrow \delta \underline{x}^* = \begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{y_0}{1+y_0} \end{pmatrix}$$ Lösung des adjungierten Problems.

⇒ Periodizitätsbedingung aus Satz 1

$$\langle \delta \underline{x}^*, \underline{f} \rangle = 0$$

Einsetzen von $\delta \underline{x}^*$ und $\underline{f}$

$$0 \stackrel{!}{=} 2\frac{k_H}{\omega_R}\int_0^P \sqrt{(1+y_0)(1+y_0(s-\tau))}\,\cos\left(-c + \phi(s-\tau) - \phi\right)\frac{y_0}{1+y_0}\, ds$$

$$-\frac{\omega_R}{2\gamma}\int_0^P x_0^2\left(1 + 2\gamma(1+y_0)\right) ds \qquad = \left[\int \delta\underline{x}^* \cdot \underline{f}\; ds\right]$$

⋮ ein paar Näherungen für $\sqrt{}$ und Taylor des cos – Terms
⋮

$$\Rightarrow \quad k_H = \frac{-(1+2J)}{2T} \frac{1}{\cos C + \alpha \cdot \sin C}$$

$$k_H = \frac{\Gamma_{RO}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{1}{\sin(C - \arctan\alpha)}$$

[wir wissen $\Gamma_{RO} = \frac{1+2J}{2T}$
$= \gamma \left(\frac{1+2J}{2}\right)$]

$$\boxed{k_H \geq \frac{\Gamma_{RO}}{\sqrt{1+\alpha^2}}}$$

(Abschätzung für $\sin(C - \arctan\alpha) = 1$)
$\hat{=}$ untere Grenze für die Hopf – Bifurkation

- Sobald Feedback den Einfluss der RO-Dämpfung Γ_{RO} kompensieren kann wird die Lösung wieder periodisch, d.h. Laser und damit 1. ECM instabil.