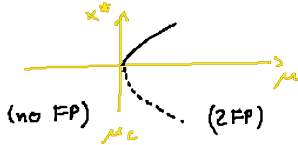


# English Summ 1-

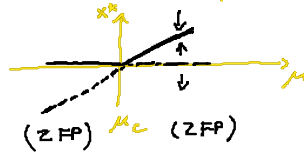
## 1.3. Bifurcations

(A) Zero-eigenvalue bifurcations:  $\lambda < 0 \rightarrow \lambda > 0$   
 $\det > 0 \quad \det < 0$

saddle-node bif.



transcritical bif.



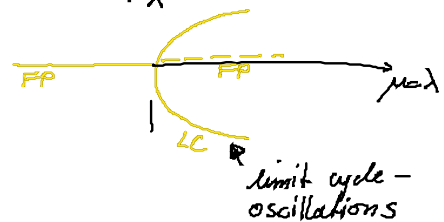
pitchfork bif.



(B) Hopf-bifurcation:  $\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega$

$\lambda_0 < 0 \rightarrow \lambda_0 > 0$   
 $r \uparrow$

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega \mp (r + i\gamma)|z|^2)z$$

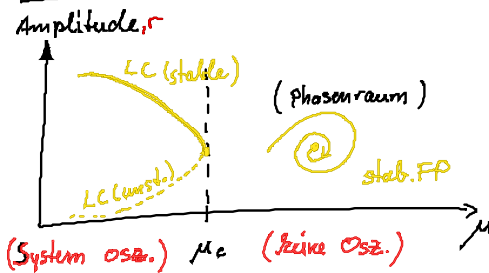


osc. amplitude  $r \rightarrow 0$   
 frequency  $\neq 0$

## (C) Lokale Bifurkationen von Grenzyklen

Startpunkt jetzt: Grenzyklus, nicht FP  
 keine einfache lin. Stabilitätsanalyse

### (C1) Sattel-Knoten-Bifurcation eines Grenzyklus



Amplitude  $\neq 0$

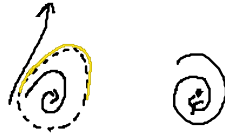
Frequenz  $\neq 0$

(System osz.)  $\mu_c$  (keine osz.)

Phasenraum:



$\mu < \mu_c$



$\mu = \mu_c$        $\mu > \mu_c$

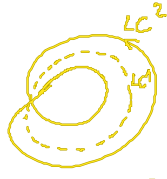
Englisch:  
condensation of paths  
fold bifurcation of LC

[Floquet-Theorie nötig]

(C2) Perioden - Verdopplung (flip - bifurcation)



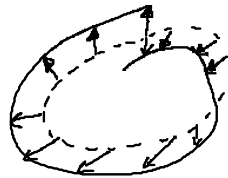
Periode - 1  
Grenzzyklus



Periode - 2  
Grenzzyklus

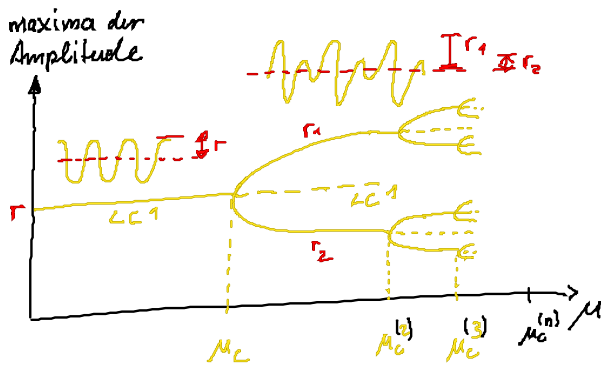
Möbius-band

mind. 3D Phasenraum



phase flip  $\pi$   
nach einem Umlauf

Torsion benachbarter Trajektorien



$n=0$   
 $T$

$n=1$   
 $2T$

$n=2$   
 $4T$

$n$   
 $2^n T$

Floquet-Exp.  $\Lambda = \lambda + i\omega$

Bif.:  $\lambda = 0$   
 $\omega T = \pi$

$\Rightarrow$  Floquet-Multiplikatoren  
 $\mu = e^{\Lambda T} = e^{i\pi} = -1$

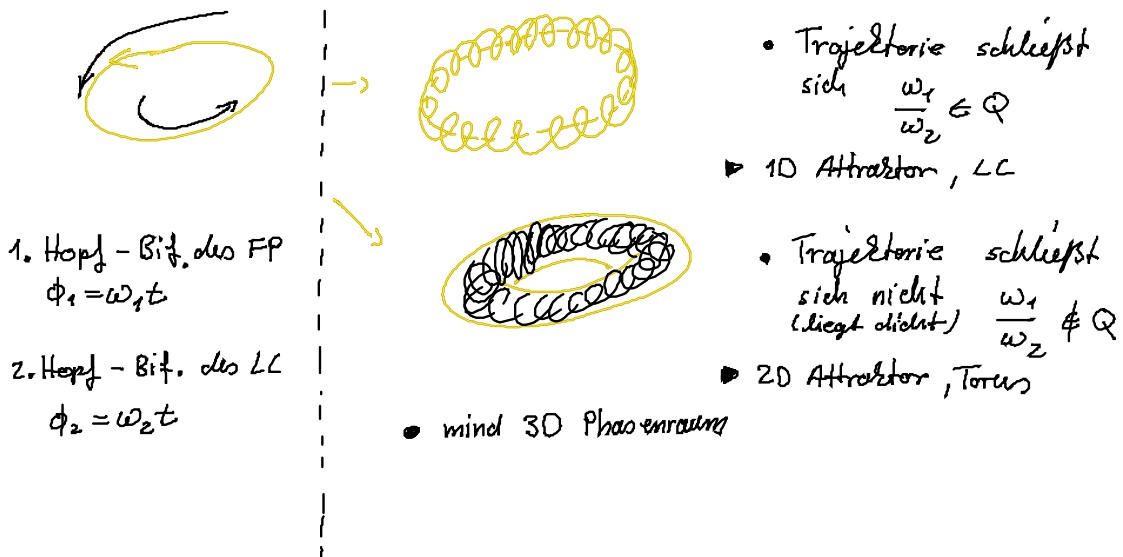
häufig Periodenverdopplungs-Kaskade  
ins Chaos (Feigenbaum-Szenario)

$\rightarrow$  unendlich viele instabile periodische Orbits der Periode  $2^n T$   
( $n=0, 1, 2, \dots$ )

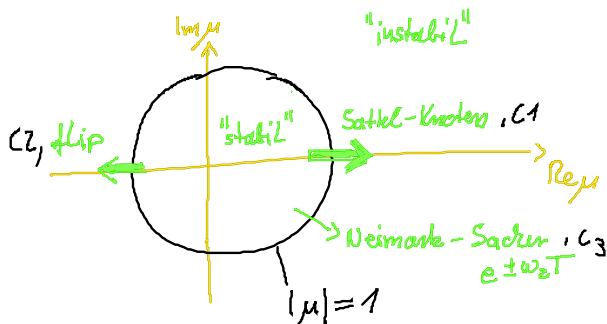


### (C3) Sacker - Neimark - Bifurkation

(Sekundäre Hopf - Bif. eines Grenzzykluses)



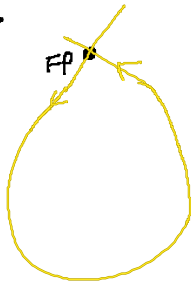
[ Fall  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ : frequency locking ]



Floquet Multiplikator  $\mu = e^{\lambda T}$

(D) Globale Bifurkationen von Grenzzyklen  
globale qualitative Änderung des Phasenportraits

z.B.

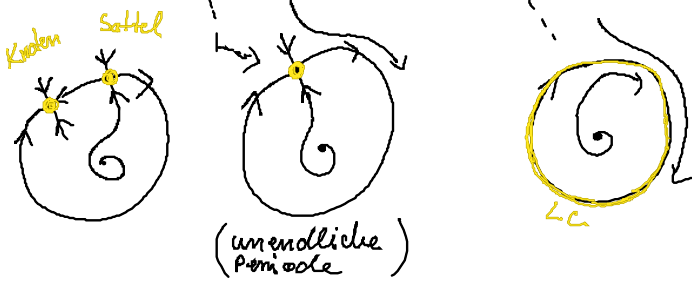
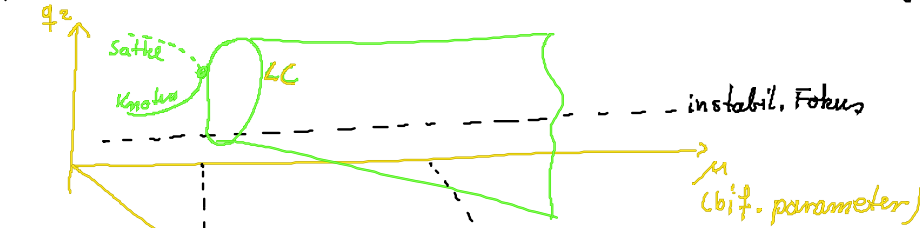


homoklinur  
Orbit  
(an der Bif.)



kein loop  
(nach Bif.)

(D1) Sattel-Knoten-Bif. auf einem Grenzzyklus (Omega explosion)



Amplitude  $\neq 0$   
Frequenz  $\rightarrow 0$

Saddle-node infinite period (SNIPER)  
saddle-node on invariant cycle (SNIC)

Einfaches generisches Modell für SNIPER

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x^2-y^2) + y(x-b) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) - x(x-b) \end{aligned}$$

Dizinger, Ning, Hu, PRE 50, 3508 (1994)

Lasor: Ziemann, Aurd, Lingnan  
Schöll, Lüdge  
Europhys. Lett 103 (2013)

in Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$   
 $y = r \sin \varphi$

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\varphi} = b - r \cos \varphi \end{cases}$$

Fixpunkte:  $r=0$   $\leftarrow$  Fokus im Ursprung  
 $r=1, b = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \arccos b \quad (b < 1)$   
 $\rightarrow$  Sattelpunkte & Knoten

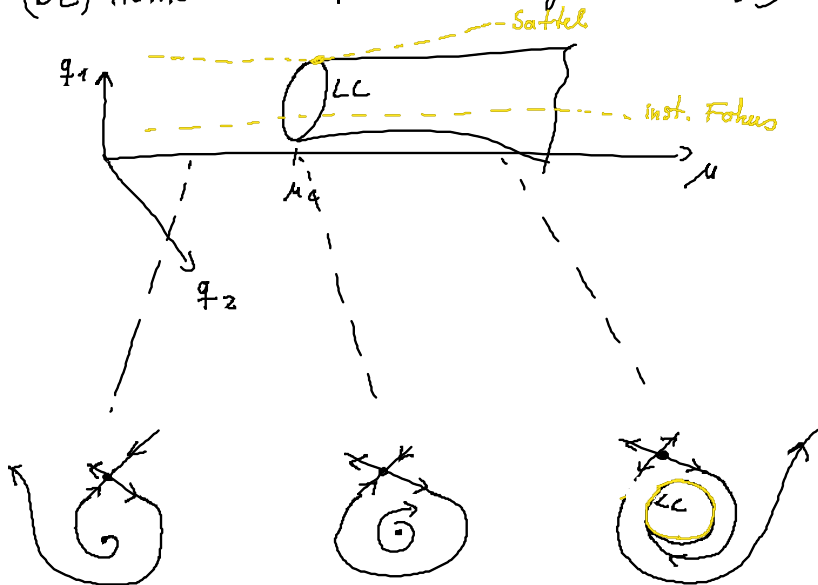
SNIPER bei  $b=1$

$b > 1$ : LC mit  $r=1 \quad \dot{\varphi} = b - \cos \varphi > 0 \quad \forall \varphi$

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b - \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - 1}}$$

$\rightarrow T \rightarrow \infty$  für  $b \rightarrow 1$   
 (skaliert mit  $\frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}}$ )

(DZ) Homokline Bif. (blue-sky catastrophe)



Amplitude  $\neq 0$   
 Frequenz  $\rightarrow 0$