Theoretische Physik VI:
Nichtlineare Dynamik & Kontrolle

SS 2016

1. Dynamische Systeme und deterministisches Chaos

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern
- Abhängigkeit von kleinen äußeren Störungen
- " von Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen
- globale Aussage über den dynamischen Fluss, d.h. die Gesamtheit aller Bahnen

__Qualitative Dynamik__: Fluss als Ganzes
Stabilität
topologische Struktur

1.1 Vektorfelder als dynamische Systeme

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n \rightarrow$ dynamische Variablen

$\underline{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

Dynamik vieler Systeme lässt sich als System von (nichtlin.) DGL. 1. Ordnung formulieren.

deterministisches System

z.B. Newton'sche Bewegungsgleichung mit Reibung

$$\ddot{y} + \underset{\text{Reibung}}{f_1(y,t)}\,\dot{y} + \underset{\text{Kraft}}{f_2(y,t)} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 := y \\ x_2 := \dot{y} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1(x_1,t)\,x_2 - f_2(x_1,t) \end{array} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

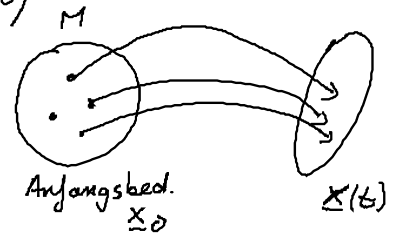
speziell Hamilton'sche Systeme

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{array} \qquad H(q,p) \text{ Hamiltonfunktion}$$

Fluss des Vektorfeldes $\underline{F}$ auf der Mannigfaltigkeit M
(Phasenraum, z.B. $\mathbb{R}^n$)

$$\phi: \; M \times \mathbb{R}_t \longrightarrow M$$

mit $\phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t; \underline{x}_0)$



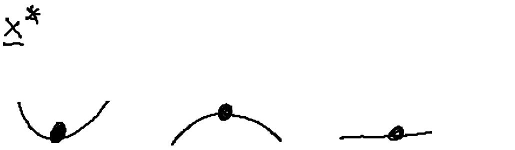
Gesamtheit aller Bahnkurven
= Trajektorien

Fixpunkt $\underline{x}^*$ des autonomen dyn. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$

(stationäre Pkt, Gleichgewichtspunkten, singuläre Punkte, krit. Punkte)

$$0 = \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*) \longrightarrow \underline{x}^*$$

Stabilität eines Fixpunktes:



Test durch Linearisierung für
kleine Auslenkungen

$$\delta \underline{x} := \underline{x} - \underline{x}^*$$

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{\underline{x}^*} \delta x_k \qquad (DF)_{x^*} = A$$

$$\delta \underline{\dot{x}} = (DF)_* \, \delta \underline{x} \qquad \text{mit Jacobi-Matrix } DF$$

(lineare Gleichung)

System von lin. DGL mit konstanten Koeffizienten

Lösungsansatz $\delta x(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t} \implies \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi}$

Eigenwertgleichung

$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

λ_k : Eigenwerte

$\underline{\xi}^{(k)}$: Eigenvektoren

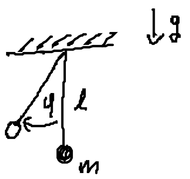
allgemeine Lösung : $\delta \underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

(Annahme: keine entarteten Eigenwerte λ_k

c_k durch Anfangsbedingung gegeben)

<u>Beispiel</u> : (i) Ebenes Pendel (ohne Reibung)

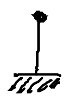
$$m l^2 \ddot{\varphi} + m g\, l \sin\varphi = 0$$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi \\ x_2 = p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 = -m g l \sin x_1 \end{array}$$

Fixpunkte : $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \longrightarrow x_2 = 0$, $x_1 = n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$

a) 

b) 

Linearisierung
$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}}_{DF(\underline{x})} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) $x_1 = x_2 = 0$

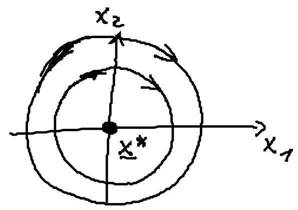
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & 0 \end{pmatrix} \implies \text{Eigenwerte} \quad \det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$$

$$\implies \delta \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \xi^{(2)} e^{-i\omega t}$$

ungedämpfte Schwingungen



Zentrum

b) $x_1 = \pi, \; x_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ mgl & 0 \end{pmatrix}$$

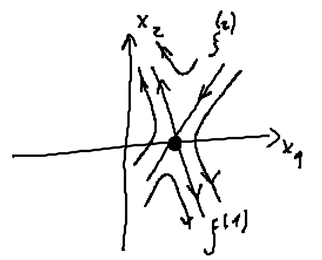
„Segway"

$$\det(A - \lambda \underline{\mathbb{1}}) = \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0 \qquad \text{Eigenwerte:} \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

allg. Lösung $\delta \underline{x}(t) = c_1 \xi^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t} + c_2 \xi^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}$ ← stabile Richtung

$\to \infty$
instabil in Richtung $\xi^{(1)}$

Sattelpunkt



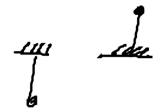
NB: Da Matrix A nicht symm ist, sind die Eigenvektoren i.a nicht senkrecht zueinander.

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{2\gamma \dot{\varphi}}_{\sim v} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$

Reibung

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_2}{ml^2}\\ \dot{x}_2 &= -mgl\sin x_1 - 2\gamma x_2\end{aligned}\right\}$$ Fixpunkte unverändert



a$_1$) a$_2$)

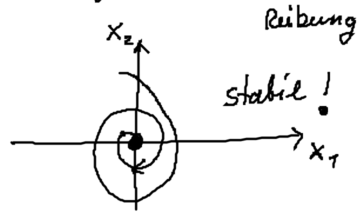
Linearisierung: $$\begin{pmatrix}\delta\dot{x}_1\\ \delta\dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{ml^2}\\ -mgl\cos x_1 & -2\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{pmatrix}$$

a$_1$) $x_1 = x_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{ml^2}\\ -mgl & -2\gamma\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$ (schwache Reibung $\gamma^2 < \omega^2$)

gedämpfte Schwingung

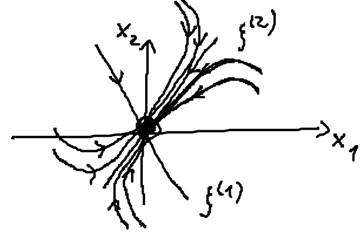


stabil!

Fokus
(stabiler Fokus)

starke Reibung
($\gamma^2 > \omega^2$) : $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

(überdämpfte Schwingung)



Knoten
(stabiler Knoten)