

# Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik & Kontrolle

SS 2016

## 1. Dynamische Systeme und deterministisches Chaos

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von "äußeren Parametern"
- Abhängigkeit von reinen "äußeren Störungen"
- " von Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen
- globale Aussage über den dynamischen Fluss, d.h. die Gesamtheit aller Bahnen

Qualitative Dynamik : Fluss als Ganzes  
Stabilität  
topologische Struktur

### 1.1. Vektorfelder als dynamische Systeme

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n \rightarrow$  dynamische Variablen

$\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^n$  Vektorfeld

Dynamik vieler Systeme lässt sich als System von (nichtlin.) DGL. 1. Ordnung formulieren.

deterministisches System

z.B. Newton'sche Bewegungsgleichung mit Reibung

$$\ddot{y} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Reibung}}}{f_1(y,t)} \dot{y} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kraft}}}{f_2(y,t)} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 := y \\ x_2 := \dot{y} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1(x_1,t)x_2 - f_2(x_1,t) \end{array} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

speziell Hamilton'sche Systeme

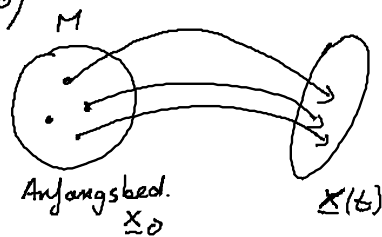
$$\left. \begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{array} \quad H(q,p) \text{ Hamiltonfunktion}$$

Fluss des Vektorfeldes  $\underline{E}$  auf der Mannigfaltigkeit  $M$   
(Phasenraum, z.B.  $\mathbb{R}^n$ )

$$\phi : M \times \mathbb{R}_t \longrightarrow M$$

mit  $\phi(x_0, t) = \phi_t(x_0) = \underline{x}(t; x_0)$

Gesamtheit aller Bahnkurven  
= Trajektorien



Fixpunkt  $\underline{x}^*$  des autonomen dyn. Systems  $\dot{\underline{x}} = \underline{E}(\underline{x})$

(stationäre Pkt, Gleichgewichtspunkten, singuläre Punkte, krit. Punkte)

$$0 = \dot{\underline{x}} = \underline{E}(\underline{x}^*) \longrightarrow \underline{x}^*$$

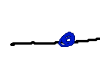
Stabilität eines Fixpunktes:



stabil



labil  
(instabil)



indifferent

Test durch Linearisierung für  
kleine Auslenkungen

$$\underline{\delta x} := \underline{x} - \underline{x}^*$$

$$\underline{\delta \dot{x}}_i = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{\underline{x}^*} \delta x_k$$

$$(DF)_{\underline{x}^*} = A$$

$$\underline{\delta \dot{x}} = (DF)_{\underline{x}^*} \underline{\delta x} \quad \text{mit Jacobi-Matrix } DF$$

(lineare Gleichung)

System von lin. DGL mit konstanten Koeffizienten

Lösungsansatz  $\underline{\delta x}(t) = \underline{f} e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda \underline{f} = A \underline{f}$$

Eigenwertgleichung

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$\lambda_k$ : Eigenwerte

$\underline{f}^{(k)}$ : Eigenvektoren

allgemeine Lösung:  $\underline{\delta x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underline{f}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

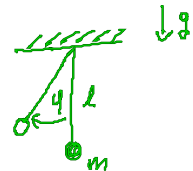
(Annahme: keine entarteten Eigenwerte  $\lambda_k$ )

$c_k$  durch Anfangsbedingung gegeben)

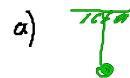
Beispiel: (i) Ebenes Pendel (ohne Reibung)

$$m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin \varphi = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \varphi \\ x_2 = p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 = -m g l \sin x_1 \end{array}$$



Fixpunkte:  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0, x_1 = n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$



Linearisierung  $\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}}_{DF(\underline{x})} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

a)  $x_1 = x_2 = 0$

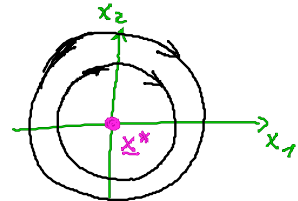
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m \cdot l^2} \\ -mg \cdot l & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte } \det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m \cdot l^2} \\ -mg \cdot l & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i \omega$$

$$\Rightarrow \underline{\delta x}(t) = c_1 \underline{f}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{f}^{(2)} e^{-i\omega t}$$

ungedämpfte Schwingungen



Zentrum

b)  $x_1 = \pi, x_2 = 0$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m \cdot l^2} \\ mg \cdot l & 0 \end{pmatrix}$$

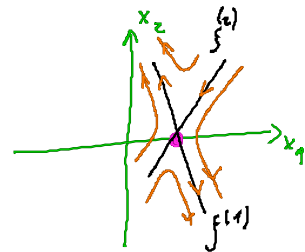
"Sagway"

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0 \quad \text{Eigenwerte: } \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

allg. Lösung  $\underline{\delta x}(t) = c_1 \underline{f}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t} + c_2 \underline{f}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}$

$\uparrow$  instabil in Richtung  $\underline{f}^{(1)}$        $\leftarrow$  stabile Richtung

Sattelpunkt



NB: Da Matrix  $A$  nicht symm ist, sind die Eigenvektoren i.a. nicht senkrecht zueinander.

(ii) Ebene Pendel mit Reibung

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{2\gamma}_{\dots} \dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$$

Keibung

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{m \cdot l^2} \\ \dot{x}_2 = -mg \cdot l \sin x_1 - 2\gamma x_2 \end{cases} \quad \text{Fixpunkte unverändert}$$

Linearisierung:  $\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m \cdot l^2} \\ -mg \cdot l \cos x_1 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

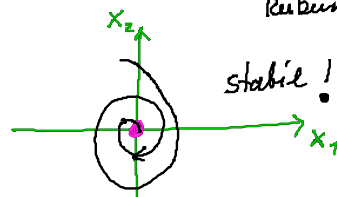
a<sub>1</sub>)  $x_1 = x_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m \cdot l^2} \\ -mg \cdot l & -2\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma \lambda + \frac{g}{l} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

(schwache Reibung  $\gamma^2 < \omega^2$ )

gedämpfte Schwingung



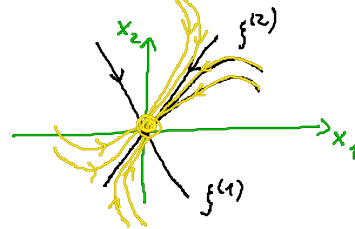
stabil!

Fokus  
(stabiler Fokus)

starke Reibung

$$(\gamma^2 > \omega^2) \quad ; \quad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$$

(überdämpfte Schwingung)



Knoten

(stabiler Knoten)