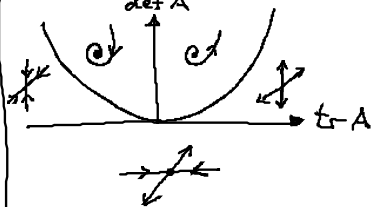


English Summary:

1.2 Stability and long-time behavior

asymptotic stability: $\delta \dot{x} = \underbrace{(DF)_x}_A \delta x$



$A \rightarrow$ eigenvalues λ_k
 $\text{Re } \lambda_k < 0 \quad \forall k$

1.2.1 Hamiltonian vector fields:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \Rightarrow \text{tr } A = \text{div } \underline{F} = 0$$

phase space volume conserved

1.2.2 Dissipative Systeme

Für dissipative Systeme gilt für kleine Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpunkt x^* umschließen

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{U_t} d^2f_x (\text{div } \underline{F})_{x^*} = \Lambda \cdot V_t \Rightarrow V(t) = e^{\Lambda t} V_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

mit Phasenraumkontraktionsrate $\Lambda: \text{div } \underline{F} = \text{tr } A = \sum_i \text{Re } \lambda_i < 0$

Allg. gilt

Def. Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren.

Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten, Fokus) heißen Senken oder Attraktoren.

Beispiel für dissipatives System: Lorenzmodell y, z

(abgeleitet aus der Temperatur- u. Strömungsverteilung einer inkompressiblen Flüssigkeit: Rayleigh-Bénard-System)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -x z + \rho z - y \\ \dot{z} = x y - b z \end{cases}$$

$$\sigma, \rho, b > 0$$

Linearisierung:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & -1 & g-x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \text{tr} A = -(\sigma+1+b)$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Phasenraumvolumina schrumpfen monoton!}$$

Hermann Haken: semiklass. Lasergleichungen
(Maxwell-Bloch-gln.)
sind äquivalent zu den Lorentzgleichungen.

Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme wird durch
Attraktoren bestimmt:

Def.: Sei E ein Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$
Eine abgeschlossene, unter dem Fluss ϕ_t invariante
($\phi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare Teilmenge $A \subset M$ heißt
Attraktor, falls


- (i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) mit $\phi_t(U_0) \subseteq U_0$ ($t > 0$)
- (ii) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0$ $\exists T > 0$, so dass $\phi_t(U_0) \subset V$ ($t > T$)



d.h. es gibt ein Attraktorbecken U_0 , aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor läuft.

NB: Es kann mehrere koexistierende Attraktoren auf M geben.

Mindest dim. n des Phasenraums	Attraktor	Attraktor- dim.	
1	stabiler Fixpkt.	0	$n=1$
2	stabiler Grenzzyklus (limit cycle)	1	$n=2$
3	stabiler Torus T^2	2	

seltsamer Attraktor (strange)	$2 < d < 3$ fraktal	quasiperiodisch 2 Frequenzen, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ chaotisch 
----------------------------------	------------------------	--

1.3 Bifurkationen

- Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollpar. μ ?
- Zahl und Art der Attraktoren kann sich selbsterstehend bei einem krit. Wert μ_c ändern.
 → Bifurkation („Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit“)
 Notwendige Voraussetzung: Nichtlinearität
- Verknüpft mit Stabilitätswechsel → untersuche lineare Stab. der Fixpkte. (für lokale Bif.)

Klassifizierung

(A) Eigenwert-Null-Bifurkation

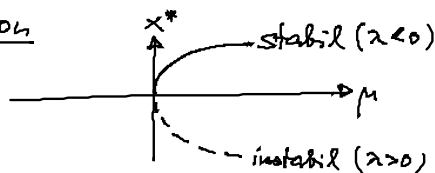
$$\lambda < 0 \rightarrow \lambda > 0$$

$$\det A > 0 \rightarrow \det A < 0$$

(A1) Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

$$x^* = \pm\sqrt{\mu}$$



(A2) Transkrit. Bifurkation

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad \delta \dot{x} = (\mu - 2x^*) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases}$$

Stabilitätswechsel
bei $\mu_c = 0$

