English Summary

<u>Interplay of delay and noise</u>

Gaussian white noise : $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t')$

autocorr. function $\Psi(s) = \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t+s) - \langle x \rangle) \rangle$

power spectral density $\boxed{S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t) x(t+s) \rangle e^{i\omega s} ds}$

Wiener – Khinchin Theorem

noise induced osc. : Van der Pol

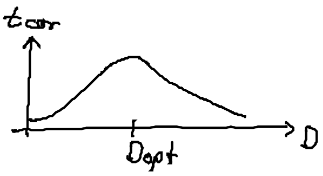
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = (\varepsilon - x^2) y - \omega_0^2 x + D\xi(t)$$

FitzHugh – Nagumo

$$\varepsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y$$
$$\dot{y} = x + a$$

<u>coherence resonance</u>

(FHN $|a|>1$)



$$t_{cor} = \frac{1}{\Psi(0)} \int_0^{\infty} |\Psi(s)| ds$$

4.2. Stochastische Differentialgleichungen (SDE)

- kurze Einführung zur Handhabung

Gegeben sei ein dynamisches System mit Rauschen

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t) + b(x,t)\,\xi(t)$$

$\xi(t)$ unkorreliertes weißes Rauschen
$\langle \xi(t) \rangle = 0$
$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t')$

Problem: Durch Rauschen sind die Trajektorien $x(t)$ nicht mehr differenzierbar

$x(t)$ ist jetzt eine Zufallsvariable

Umschreiben in Differentialoperatoren

$$dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dW(t)$$

wobei $dW(t) = \xi(t)\,dt$

"Wiener Prozess"

$$W(t) = \int_0^t \xi(t')\,dt'$$

$\Rightarrow$ SDE kann formal integriert werden

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt'\, a(x,t') + \int_{t_0}^{t} dW(t')\, b(x(t'),t')$$

- das ist keine explizite Lösung, da $a(x,t)$ von $x(t)$ abhängt

$\rightarrow$ keine analytische Lösung möglich
stattdessen können Mittelwerte und Varianz bestimmt werden

Varianz : $\langle (x(t) - \langle x\rangle)(x(t) - \langle x\rangle)\rangle = \Psi(0) = \sigma_x$

Beispiel : 1 dim System $x \in \mathbb{R}$
$a = 0$
$b = const$

$\Rightarrow dx = b\,dW$ (x1)

Mittelwert : $\langle x\rangle = \left\langle b\int_{t_0}^{t} dW(t')\right\rangle = \left\langle b\int_{t_0}^{t} \xi(t')\,dt'\right\rangle = 0$

$\delta(t-t') = \langle \xi(t)\xi(t')\rangle$
$0 = \langle \xi(t)\rangle$

Varianz : $\langle x(t)\,x(t)\rangle = \left\langle b^2\int_{t_0}^{t} dW(t')\int_{t_0}^{t} dW(t'')\right\rangle$

$$= b^2\int_{t_0}^{t} dt' = \underline{\underline{b^2(t-t_0)}}$$

Varianz steigt linear mit der Zeit. Abweichung vom Startwert steigt mit $\sqrt{t-t_0}$.

Beispiel 2: 1 dim
$b = const$
$a(x) = ax$

$\Rightarrow \quad dx = ax + b\,dW$ (*2)

Lineare inhomogene stochastische DGL.

1) homogene Lösung finden zu $\dot{x} = ax$

Fundamentalsystem $x^H(t) = e^{at}$

2) Ansatz für inhomogene Lösung zu $\dot{x} = ax + b\xi$

$x^I = c(t)\,x^H$ (Variation der Konstanten)

einsetzen in DGL

$$\dot{c}x^H + c\dot{x}^H = a\,c\,x^H + b\xi$$
$$\dot{c}x^H + \cancel{c\,a x^H} = \cancel{a\,c\,x^H} + b\xi$$
$$\dot{c}x^H = b\xi$$

Nebenbemerkung

Suchen $x^H x^{H^*} = 1$

x^{H^*} ist eine Lösung zur adjungierten DGL

$$-\dot{x}^* = a^* x^*$$

hier $x^{H^*} = e^{-at}$

$$\boxed{\dot{c} = b\xi\,x^{H^*}}$$

$$\rightarrow c(t) = \int_0^t b\,\xi(s)\,x^{H^*}(s)\,ds$$

allgemeine Lösung von (*2)

$$\boxed{x(t) = x^H(t)\cdot x_0 + x^H(t)\cdot c(t)}$$

stochastische Zufallsvariable $x(t)$

Mittelwert: $\langle x\rangle = \langle x_0\cdot x^H\rangle + \langle c(t)\cdot x^H\rangle$

$$= e^{at}\left(\langle x_0\rangle + \langle c(t)\rangle\right)$$

$$= e^{at}\left(\langle x_0\rangle + \left\langle \int_0^t b\,\xi(t')\,e^{-at'}\,dt' \right\rangle\right)$$

geht gegen Null für $t\to\infty$ $(a<0)$

$\longrightarrow 0$ für $t\to\infty$

Varianz

$$\sigma = \Psi(0) = \langle x(t)\,x(t)\rangle$$

$$\Psi(s) = \langle x(t)\,x(t+s)\rangle$$

$$= \left\langle \left(x_0 e^{at} + c(t) e^{at}\right)\left(x_0 e^{a(t+s)} + c(t+s) e^{a(t+s)}\right)\right\rangle$$

sei $\langle x_0\rangle = x_0$

$$= \underbrace{x_0^2 e^{2at+as}}_{\substack{\to 0 \\ \text{für } t\to\infty \\ (\text{mit } e^{2at})}} + \underbrace{\left\langle 2c\left(e^{2at+as} x_0\right)\right\rangle}_{\substack{\to 0 \\ \text{für } t\to\infty \\ (\text{mit } e^{at})}} + \left\langle c_t c_{t+s} e^{2at+as}\right\rangle$$

sei $a < 0$

$dWdW = dt$

$$= \left\langle b^2 \int_0^t \int_0^{t+s} \xi(t')\,\xi(t'')\, e^{-at'} e^{-at''} dt' dt'' \, e^{2at+as}\right\rangle$$

$\delta(t-t') = \langle \xi(t')\xi(t)\rangle$

$$= b^2 \int_0^t e^{-2at'} dt' \cdot e^{2at+as}$$

$$= b^2 \left[\frac{1}{-2a} e^{-2at'}\right]_0^t e^{2at+as}$$

$$= \frac{b^2}{-2a}\left[e^{-2at} - 1\right] e^{2at+as}$$

$$= \frac{b^2}{-2a} e^{as} - \underbrace{\frac{b^2}{-2a} e^{2at+as}}_{\to 0 \text{ für } t\to\infty}$$

$$\boxed{\Psi(s) = \frac{b^2}{-2a} e^{as}}$$

Vergleiche VL 3.6.

Varianz $\boxed{\sigma = \frac{b^2}{-2a}}$

Bemerkung

SDE der Form $dx = ax + b\xi$ hat eine Varianz die sich Reziprok mit a (≙ Eigenwert) ändert.

- starke Dämpfung → kleine Varianz
- schwach gedämpfte Eigenwerte werden leicht vom Rauschen gestört!

NB: $\int dW \int dW \;\hat{=}\; \int dt$

$$\left\langle \left(\sum_{t_i}^{t_1\;t_2} dW_1 + dW_2 + \ldots \right) \left(\sum_{t_i}^{t_1\;t_2} dW_1 + dW_2 \ldots \right) \right\rangle$$

$$\left\langle \underbrace{\sum_{t_i} dW_i dW_i}_{1} \right\rangle + \left\langle \underbrace{\sum_{t_i} dW_i\, dW_{i+1}}_{\langle \xi(t_i)\,\xi(t_{i+1})\rangle = 0} \right\rangle + \ldots$$

Beispiel 3 : Lineare SDE mit mehrdimensionalem Phasenraum

$$d\underline{X}_t = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X}_t\, dt + \underline{\underline{B}}\, d\underline{W}$$

$d\underline{W}$: mehrdimensionaler Wiener Prozess

$\underline{X}_t \in \mathbb{R}^d$

(gleiches Vorgehen wie bei Bsp. 2)

Fundamentalsystem der homogenen Lösung

$$\underline{\underline{\phi}}(t) = e^{\int_0^t A(u)du} = \left(e^{\lambda_1 t}\underline{v}_1,\; e^{\lambda_2 t}\underline{v}_2, \ldots, e^{\lambda_d t}\underline{v}_d \right)$$

eine Spalte der Matrix ist eine Eigenlösung

Allgemeine Lösung

$$\underline{X}_t = \underline{\underline{\phi}}(t)\,\underline{X}_0 + \underbrace{\underline{\underline{\phi}}(t) \int_0^t \underline{\underline{\phi}}^{-1}(s)\,\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{\xi}}\; ds}_{\underline{c}(t)}$$

[1D: $\int_0^t b\,\xi\, x_H^*(s)\,ds$]

[$\underline{\underline{\phi}}^{-1}$ Lösung von $-\dot{\underline{X}}_t^* = \underline{\underline{A}}^* \underline{X}_t^*$

$\langle \underline{\underline{A}}\,\underline{x}, \underline{y}^* \rangle = \langle \underline{x}, \underline{\underline{A}}^* \underline{y}^* \rangle$]

Mittelwert $\langle \underline{X}_t \rangle = 0$ (gleiche Argumentation wie 1D Fall)

Varianz Matrix $\underline{\underline{\sigma}} = \langle \underline{X}_t \otimes \underline{X}_t^T \rangle$

$$\stackrel{(t\to\infty)}{=} \phi(t) \int_0^t \left[\underline{\underline{\phi}}^{-1}(s)\, \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\phi}}^{-1}(s)^T \right] ds\; \phi^T(t)$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \int_0^t e^{A(t-t')}\, \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{B}}^T e^{A^T(t-t')}\, dt'}$$

Vorteil: Zur Berechnung der Varianz muss die SDE nicht integriert werden
$\rightarrow$ spart Rechenaufwand